

Comunicación de la ciencia

Ponete en mi lugar. Ejemplos de homogeneidad en geometría *

Marcos Salvai

FAMAF (Universidad Nacional de Córdoba) y CIEM (CONICET)



Resumen

¿Con qué argumentos se puede justificar que los elementos de un conjunto son todos “lo mismo” en cierto sentido? La razón puede ser en principio ingenua, basada en (auto-)percepción o empatía, pero en aras de la precisión y para organizar mejor las ideas puede convenir recurrir a un grupo transitivo de transformaciones.

En esta nota presentamos tres ejemplos: a) Simetrías ocultas de una distribución de planos. b) Una distancia compatible con la homogeneidad en el conjunto de todas las elipses, que puede resultar extraña a simple vista. c) Un vistazo a la geometría de la esfera de Lie (admitir puntos como circunferencias de radio cero en este contexto).

Homogeneidad

Se puede pensar que los triángulos en la Figura 1 son los mismos, ya que solo la posición y el tamaño son diferentes, o bien que no lo son, con la misma explicación sin la palabra “solo”. En el primer caso viene a la mente el grupo G generado por todos los movimientos rígidos y las homotecias del plano, y abre la posibilidad de que una cantidad infinita de triángulos sean también los mismos que los dos dados.

Con esta motivación, consideraremos conjuntos con un grupo de transformaciones transitivo adecuado. Esto nos dará la idea de que no hay elementos distinguidos y que no omitimos ninguno.

Sea A un conjunto. Recordamos que un conjunto G de transformaciones biyectivas de A (funciones biyectivas de A en A) forma un **grupo** si f^{-1} y $f \circ g$ pertenecen a G cuando f y g pertenecen a G .

*Publicado originalmente como Salvai, M. If You Were in My Shoes: Examples of Homogeneity in Geometry. Math Intelligencer 47, 323–326 (2025).

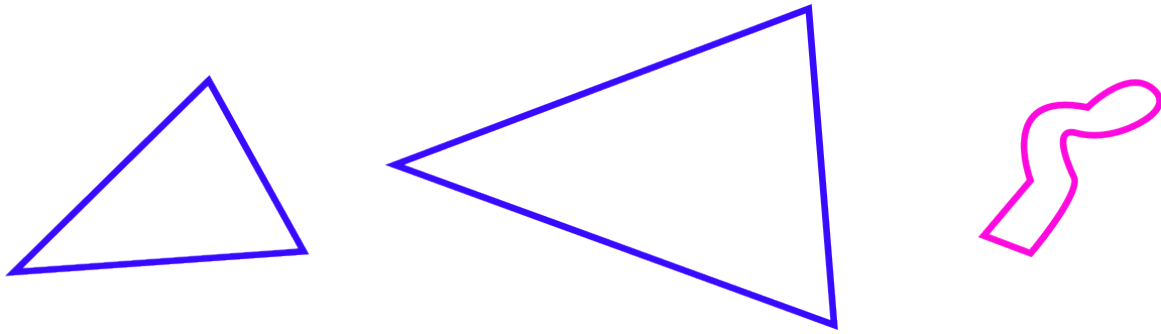


Figura 1: ¿Dos triángulos diferentes o el mismo triángulo en diferentes tamaños y posiciones?

El grupo G es **transitivo** en A si para cada $p, q \in A$ existe $f \in G$ tal que $f(p) = q$. Invitamos al lector o a la lectora a relacionar las propiedades de una acción transitiva con las características de “ser lo mismo”, por ejemplo, que b es lo mismo que a si a es lo mismo que b .

Así, ningún punto de la esfera es especial, y podemos tomar como grupo de transformaciones transitivo el grupo G de todas las rotaciones alrededor del centro. De manera similar para los subespacios de dimensión k de un espacio vectorial de dimensión n , con $G = GL(n, \mathbb{R})$, el grupo lineal general (cuyos elementos llevan subespacios en subespacios, preservando la dimensión).

Encontrar un grupo transitivo de transformaciones puede contribuir a una mejor comprensión y precisión; además, a descubrir nuevos objetos que son lo mismo que los que ya tenemos y que no habíamos tomado en consideración. Por supuesto, podemos elegir el grupo transitivo guiándonos por nuestros instintos. Incluso podemos forzar que todos los elementos de un conjunto sean lo mismo, mediante el grupo de todas las biyecciones (por ejemplo, si estamos convencidos, por alguna razón que no podemos discernir, de que el tercer dibujo de la figura 1 encaja bien con los triángulos).

La búsqueda de la homogeneidad es una expresión de la máxima de **Gottfried Leibniz** *la unidad en la diversidad*. Es el punto central del **programa de Erlangen**, de **Félix Klein**, que ha influido significativamente en la geometría desde su publicación en 1872. Si un conjunto exhibe lo que se reconoce claramente como simetría, pero ningún grupo transitivo de transformaciones parece adecuado, quizás convenga darle una mirada al concepto de grupoide [7].

Presentamos tres ejemplos concretos. Pertenecen al ámbito de la geometría, por un lado, porque involucran simetrías y, por el otro, porque tratamos con conjuntos formados por objetos geométricos, es decir, conjuntos cuyos elementos son ciertos subconjuntos del espacio euclidiano (pero no en sí mismos puntos del espacio euclidiano, en contraste con la concepción primitiva del alcance de la geometría).

El patrón de cada ejemplo es el siguiente. En primer lugar, damos razones ingenuas para que el conjunto no tenga elementos distinguidos; a continuación, buscamos un grupo transitivo de transformaciones, confirmando así el objetivo expresado anteriormente. En el segundo ejemplo, exploramos además las implicaciones de la homogeneidad en la noción de distancia.

Simetrías de una distribución de planos en \mathbb{R}^3

Sea \mathcal{P} el conjunto de planos punteados dispuestos como en la Figura 2, que es una de las presentaciones de la forma de contacto estándar en \mathbb{R}^3 . A cada punto $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ le asignamos el plano

$$P_p = \text{span} \{(1, 0, y), (0, 1, -x)\}$$

por p (el origen descansa en p). Solo están representados los planos $P_{(x,y,0)}$; la disposición es la misma en el nivel $z = c$ para todo c , es decir, es invariante por traslaciones verticales.

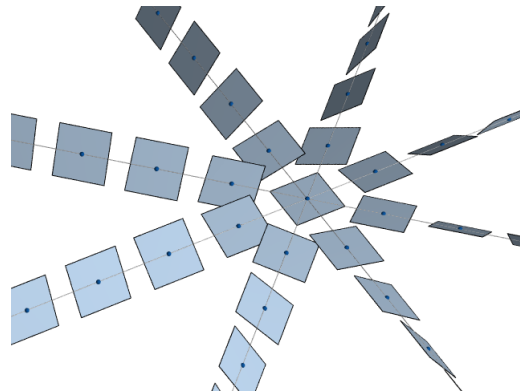


Figura 2: La distribución de contacto estándar. Dibujo de Patrick Massot

De hecho, el plano en el medio puede no ser especial. **Recurrimos a la empatía:** Otro plano va a ver los planos alrededor de él con diversas pendientes, de manera no muy diferente que desde la perspectiva del plano ubicado en el origen.

Una de las ideas fundamentales de esta nota es reforzar esto encontrando un grupo transitivo G de transformaciones de \mathcal{P} . Podemos tomar como G una de las personificaciones del grupo de Heisenberg, como se muestra a continuación.

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, sea $F_{a,b,c} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación afín definida por

$$F_{a,b,c}(x, y, z) = A_{a,b}(x, y, z) + (a, b, c),$$

con $A_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A_{a,b}(x, y, z) = (x, y, z - ay + bx)$.

No es difícil verificar que $G = \{F_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ es un grupo transitivo de transformaciones de \mathbb{R}^3 que induce, a través de sus aproximaciones lineales, es decir, sus diferenciales $(dF_{a,b,c})_p = A_{a,b}$, un grupo transitivo de transformaciones de \mathcal{P} . Esto sigue del cálculo directo $A_{a,b}(P_{(x,y,z)}) = P_{F_{a,b,c}(x,y,z)}$.

Hay simetrías obvias que no se han tenido en cuenta en la elección de G , a saber, las rotaciones R_t en un ángulo t alrededor del eje z . En efecto, el conjunto de todas las aplicaciones $F_{a,b,c} \circ R_t$, con $a, b, c, t \in \mathbb{R}$, es un grupo transitivo de biyecciones de \mathcal{P} que contiene a G como un subconjunto propio; se denomina grupo oscilador. En realidad, el grupo de transformaciones suaves de \mathbb{R}^3 con inversas suaves que conservan la distribución de planos \mathcal{P} es de dimensión infinita (véase, por ejemplo, el corolario 2.6.3 en [3]).

Peculiaridades de una manera afínmente invariante de medir la distancia entre elipses

Recordamos que una elipse (con ejes no necesariamente paralelos a los ejes coordenados) es un conjunto congruente a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1\}$, para ciertos $\alpha, \beta > 0$, por el grupo de transformaciones rígidas del plano. Sea \mathcal{E} el conjunto de todas las elipses en el plano, que pueden parametrizarse localmente con cinco números reales (por ejemplo, dos números determinan el centro, otros dos, los tamaños de los ejes, y el quinto, la pendiente de uno de los ejes).

Si no queremos favorecer a las circunferencias, podemos hacer actuar en \mathcal{E} el grupo \mathcal{A} de transformaciones afines del plano, de la manera canónica. Las aplicaciones en \mathcal{A} son aquellas $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma $T(u) = Au + a$ para alguna matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con $\det A > 0$

y $a \in \mathbb{R}^2$. Llevan elipses en elipses, aunque no se conservan los ejes. No es difícil demostrar que la acción de \mathcal{A} en \mathcal{E} es transitiva.

Si sos una elipse, la acción afín te impide percibir la proporción entre las longitudes de tus ejes. Mirás a tu alrededor y ves que las elipses vecinas son más estrechas o más anchas que vos en determinadas direcciones, pero la redondez ya no es un factor relevante.

Se dice que una función de distancia d en \mathcal{E} es compatible con la acción de \mathcal{A} si para cualquier par de elipses $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ y para cualquier transformación afín F tenemos

$$d(F(E_1), F(E_2)) = d(E_1, E_2). \quad (1.1)$$

En realidad existen funciones de distancia que satisfacen esta propiedad: Las elipses pueden identificarse naturalmente con distribuciones normales bivariadas (superficies de campanas gaussianas con secciones horizontales elípticas) y la forma canónica de medir la distancia entre ellas, dada por la métrica de Fisher-Rao, es invariante por transformaciones afines; lamentablemente, no parece existir una fórmula explícita para ella. Comentamos esto al final de la sección.

Estudiamos el ejemplo de dos circunferencias de radio 1 cuyos centros están separados por 4 unidades de longitud (las circunferencias azules de la figura 3). Les aplicamos la transformación lineal F de \mathbb{R}^2 determinada por $F(e_1) = 4e_1$, $F(e_2) = \frac{1}{4}e_2$, que pertenece a \mathcal{A} ($a = 0$), obteniendo las elipses rojas.

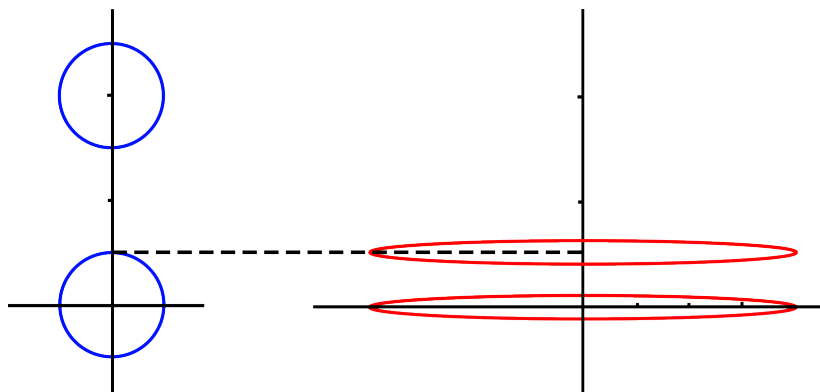


Figura 3: Las dos circunferencias azules y sus imágenes por el mapeo F

Observamos algo que a primera vista parece una contradicción con (1.1): Si $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ es compatible con la acción de \mathcal{A} , la distancia entre las elipses azules (circunferencias) es la misma que entre las rojas, aunque a primera vista estas últimas parecen estar más cerca entre sí que las primeras.

Interpretamos el fenómeno como que cada elipse toma su propio cuerpo como referencia para estimar la distancia a sus vecinas. Así, se puede explicar diciendo que, dado que las elipses rojas son delgadas verticalmente, se mueven verticalmente con pasos cortos.

Como lo hemos anunciado anteriormente, comentamos la existencia de una distancia afinmente invariante en \mathcal{E} . Sea $\text{Symm}_+(2)$ el conjunto de todas las matrices simétricas 2×2 definidas positivas (en particular, sus elementos diagonalizan con respecto a bases ortonormales). Dados $c \in \mathbb{R}^2$ y $C \in \text{Symm}_+(2)$, el conjunto

$$E(c, C) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \langle C^{-1}(z - c), z - c \rangle = 1\}$$

es una elipse (y cualquier elipse tiene esta forma). Está centrada en c y las rectas propias de C son los ejes. Por ejemplo, para $\alpha, \beta > 0$, $E(0, \text{diag}(\alpha, \beta))$ es la elipse presentada al principio de la sección. Esto induce una biyección de \mathcal{E} con $\mathbb{R}^2 \times \text{Symm}_+(2)$, que puede

considerarse como un subconjunto abierto de \mathbb{R}^5 (obsérvese que $C_{12} = C_{21}$). Se puede aplicar la transformación afín $z \mapsto a + Az$ a la elipse $E(c, C)$, obteniendo

$$a + A(E(c, C)) = E(a + Ac, ACA^T),$$

donde T denota la transpuesta. Esto da una acción transitiva de \mathcal{A} en \mathcal{E} . El estabilizador de la circunferencia de radio 1 centrado en el origen es el grupo de rotaciones alrededor del origen. Al ser este grupo compacto, un resultado clásico (véase, por ejemplo, [5], Teorema 3.17) implica que \mathcal{E} admite una manera afínmente invariante de asignar longitudes a curvas suaves en E , es decir, la longitud de $F \circ \varepsilon$ es la misma que la longitud de ε para cualquier curva ε en \mathcal{E} y cualquier $F \in \mathcal{A}$. La distancia entre dos elipses es ahora el mínimo de las longitudes de las curvas suaves a trozos en \mathcal{E} que las unen, y conserva la propiedad de invariancia.

Concretamente, no es difícil demostrar que la manera de medir las longitudes de las curvas en E de Fisher-Rao es afínmente invariante. Se define así: Sea $\varepsilon : [a, b] \rightarrow E$ una curva. Si $\varepsilon(t) = E(c_t, C_t)$ (con c_t vectores de columna), la longitud al cuadrado del vector velocidad $\varepsilon'(t)$ viene dada por

$$\|\varepsilon'(t)\|^2 = (c_t')^T C_t^{-1} c_t + \frac{1}{2} \text{tr} \left((C_t^{-1} c_t')^2 \right)$$

y, como es habitual, $\text{long}(\varepsilon) = \int_a^b \|\varepsilon'(t)\|^2 dt$. Para ello, véase, por ejemplo, [4]. Nuestros argumentos intuitivos anteriores coinciden con la siguiente interpretación de este último artículo: Desde el punto de vista estadístico, el tamaño de la elipse (que representa una superficie gaussiana en forma de campana) indica con qué precisión (dada por C^{-1}) se conoce el centro, y cuanto mayor es la precisión, más esfuerzo se necesita para desplazar el centro. En ese artículo también se pueden encontrar imágenes de geodésicas en E (curvas en E que minimizan la distancia localmente).

Por último, podemos plantear la siguiente pregunta: En este contexto, ¿cuál es la trayectoria más corta de las elipses que unen las dos circunferencias azules (o las dos elipses rojas)? Consiste en elipses que son más grandes que las de los extremos (véase, por ejemplo, la sección 3.1 en [1]), ya que las elipses más grandes cubrirán distancias grandes más fácilmente. Es una situación similar a la de [6].

Una mirada a la geometría de la esfera de Lie

Una circunferencia en la esfera $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$ es la intersección de S^2 con un plano en \mathbb{R}^3 a una distancia menor que 1 del origen; véase la figura 4 (izquierda). Consideramos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{\text{circunferencias orientadas sobre la esfera}\}.$$

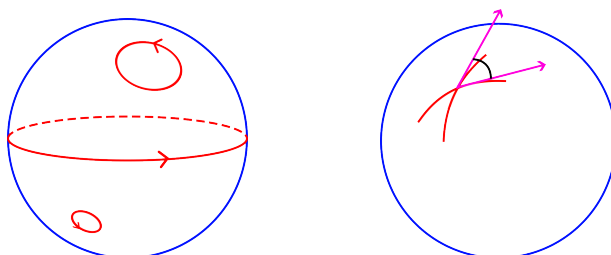


Figura 4: *Izquierda*: Circunferencias orientadas sobre la esfera. *Derecha*: El ángulo entre dos curvas que se cortan.

Los circunferencias *máximas* orientadas parecen elementos especiales de \mathcal{C} , pero si queremos poner todas las circunferencias en igualdad de condiciones, podemos considerar el grupo G de transformaciones conformes de la esfera (las que preservan el ángulo formado por dos curvas que se cortan; véase la figura 4 (derecha)), que llevan circunferencias en circunferencias de manera transitiva. El grupo G e puede realizar mediante transformaciones de Möbius del plano extendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, a través de la proyección estereográfica.

Ahora bien, ¿podemos ampliar el criterio para que los puntos y las circunferencias sean “lo mismo” en cierto sentido? Una respuesta es: Sí, **los puntos son circunferencias de radio cero**.

Pero recordemos el **efecto reconfortante de tener un grupo transitivo** de transformaciones de nuestro conjunto, que es la esencia de esta nota. Así que llamamos $\widehat{\mathcal{C}}$ al conjunto de todas las circunferencias orientadas y puntos de la esfera,

$$\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\{p\} \mid p \in S^2\},$$

y buscamos un grupo \widehat{G} que actúe en $\widehat{\mathcal{C}}$. Lo hacemos recurriendo a la geometría de la esfera de Lie, para lo cual nos remitimos al capítulo 15 de [2]. Observamos que ninguna biyección de la esfera envía un punto a una circunferencia. Por lo tanto, se usa un artificio: Ajustamos coronas a círculos y puntos orientados; estas consisten en flechas de longitud unitaria tangentes a la esfera, como en la figura 5 (una circunferencia no orientada admite dos coronas, con flechas ortogonales a la circunferencia; la orientación de estas últimas determina qué corona se elige).

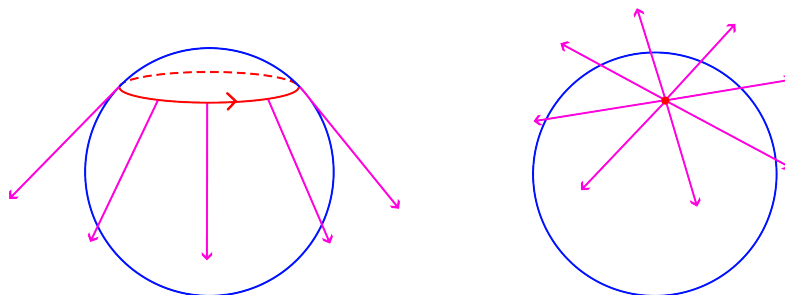


Figura 5: Coronas en circunferencias orientadas y puntos de la esfera

Sea \mathcal{D} el conjunto de coronas. Existe una biyección natural entre \mathcal{D} y $\widehat{\mathcal{C}}$, por lo que podemos hacer que \widehat{G} actúe sobre \mathcal{D} . Observamos que cada corona es un subconjunto de

$$\mathcal{T} = \{\text{flechas de longitud 1 tangentes a la esfera}\}.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos la transformación biyectiva $\phi_t : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ representada en la figura 6. Dados $u \in \mathcal{T}$ y $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t(u)$ se define como el resultado de mover u una distancia $|t|$ a lo largo del círculo máximo determinado por u , hacia adelante o hacia atrás, dependiendo del signo de t (véase la figura 6; ϕ se denomina flujo geodésico de la esfera).

Se puede demostrar que ϕ_t lleva coronas en puntos o circunferencias en coronas en puntos o circunferencias. Ahora estamos en condiciones de presentar un grupo \widehat{G} con las características deseadas. Podemos tomar como \widehat{G} el grupo de todas las transformaciones generadas por los mapeos conformes y las transformaciones ϕ_t ($t \in \mathbb{R}$), que afortunadamente resulta ser de dimensión finita; de hecho, tiene dimensión 10. Esto corrobora que la introducción de las coronas tiene un efecto de equiparación sobre las circunferencias y los puntos. Comentamos que al aplicar (las diferenciales de) las

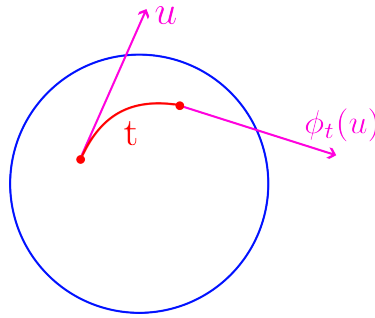


Figura 6: El flujo geodésico de la esfera

aplicaciones conformes a las coronas, se debe realizar una normalización a la longitud unitaria.

Existe un análogo de la teoría anterior para puntos e hiperesferas orientadas en S^n , que pueden parametrizarse localmente mediante $n + 1$ números reales. El grupo \widehat{G} resulta ser localmente isomorfo al grupo de automorfismos de la forma cuadrática b en \mathbb{R}^{n+3} dada por $b(s, t, x_1, \dots, x_{n+1}) = -s^2 - t^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$, de dimensión $\frac{1}{2}(n+3)(n+2)$.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Quisiera agradecer también a Patrick Massot por permitirme utilizar una de sus fotografías, a Mabel y Ramiro Salvai por su ayuda con el idioma inglés y las ilustraciones, y al Instituto Max Planck de Matematica (Bonn, Alemania) por la hospitalidad durante la redacción de esta nota.

Referencias

- [1] Costa, S.I.R., Santos, S.A., Strapasson, J.E.: Fisher information distance: a geometrical reading. *Discrete Appl. Math.* **197**, 59–69 (2015)
- [2] Jensen, G., Musso, E., Nicolodi, L.: *Surfaces in classical geometries. A treatment by moving frames.* Universitext. Springer, Cham (2016)
- [3] Geiges, H.: *An introduction to contact topology.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 109. Cambridge University Press, Cambridge (2008)
- [4] Lawson, B.A.J., Burrage, K., Mengersen, K., Weber dos Santos, R.: *The Fisher Geometry and Geodesics of the Multivariate Normals, without Differential Geometry.* arXiv:2306.01278 math.ST
- [5] Lee, J.M.: *Introduction to Riemannian manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham (2018)
- [6] Salvai, M.: Another motivation for the hyperbolic plane. *Segments moving on the line.* *Math. Intell.* **29**(2), 6–7 (2007)
- [7] Weinstein, A.: Groupoids: unifying internal and external symmetry. A tour through some examples. *Notices Am. Math. Soc.* **43**(7), 744–752 (1996)