NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Comunicación de la ciencia

La historia emocionante de una fórmula aburrida

Teo López Puccio

Lo que quiero contar trata de historia de la ciencia, astronomía, y matemática aplicada. Pero empieza en otro lugar.

Recuerdo estar cursando alguna de mis primeras materias de matemática en el ingreso a la universidad y que se me presentaran por primera vez unas fórmulas trigonométricas:

$$\sin(A-B) = \sin(A)\ \cos(B) - \sin(B)\ \cos(A) \tag{1.1}$$

$$\sin^2(\tfrac{A}{2}) = \frac{1-\cos(A)}{2} \tag{1.2}$$

Quien fuera que estaba dando la clase dijo que no las demostraría: hoy sé que se usan rutinariamente, y son tan estándar que casi se dan por sabidas. Entonces, como yo ya era un chico grande, hice como todo buen aspirante a matemático: googleé alguna de las muchas demostraciones que existen de esas fórmulas, y sacié mi duda yo solito.

Pero en lo profundo siempre tuve una duda mayor, más difícil de resolver: ¿De dónde salieron? ¿Cómo se descubre algo así? ¿Quién quiso el seno de una resta y para qué? La sensación era que ahí, hacía mucho tiempo, había habido alguien buscando algo. Y haberlo encontrado tiene que haber sido importante. ¿Qué era?

La respuesta la supe años después. Le habría fascinado a mi yo de 17 años, y ojalá le interese a alguien más: la primera aparición que se conoce de fórmulas de este estilo fue para intentar comprender el movimiento de los planetas. Pero tenían otra pinta.

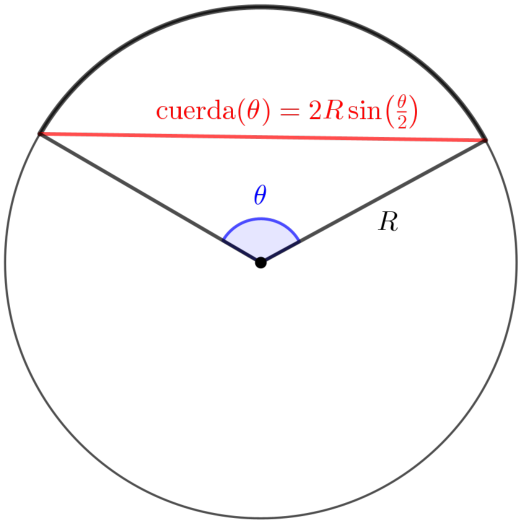

Figura 1: Cuerda de un ángulo θ

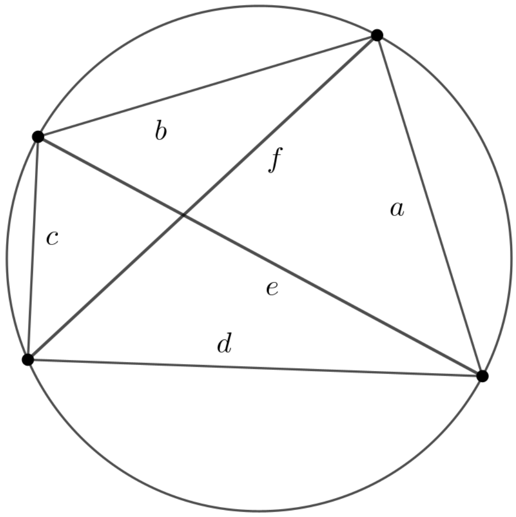

Figura 2: Teorema de Ptolomeo

Alrededor del año 150 d.C., el astrónomo griego Claudio Ptolomeo publicó uno de los textos más importantes de la astronomía antigua. Hoy se conoce como “Almagesto”, que en árabe significa “el más grande”. El tratado sentó las bases del que sería el mejor modelo astronómico por casi catorce siglos: el modelo geocéntrico ptolemaico. La tierra se ponía en el centro del universo, sí, pero no por eso era un texto simple. Era un complejo catálogo de estrellas, y un manual pionero en matemática aplicada con un objetivo concreto: dar un modelo matemático para predecir el movimiento de los planetas.

Aunque suene moderno, el tono de Ptolomeo a lo largo del texto se siente como quien realmente busca que se ponga a prueba su teoría. Le ofrece al lector todo lo necesario para replicar sus propias observaciones, explica cómo construir los instrumentos que usa, y hasta permite dudas sobre algunas de sus propias hipótesis. ¿Y cómo comienza este texto científico? Con el resultado más verificable de todos: la demostración de un teorema.

Teorema de Ptolomeo

Dado un cuadrilátero cuyos vértices están sobre una misma circunferencia, sean a, b, c, d sus lados (nombrados en orden), y e, f sus dos diagonales (fig. 2).

Entonces
$$a\,c + b\,d = e\,f$$

No daré su demostración acá, porque hoy no es mi intención. Definitivamente te incito a googlearla como hice yo con las fórmulas que no conocía. Vas a encontrar la misma demostración que dio Ptolomeo hace dos mil años, y eso de por sí es emocionante. Pero mi intención acá es explicar por qué el teorema existe, y qué tiene que ver con lo anterior.

Resulta que para hacer astronomía se necesitaba saber cuánto valía algo así como el seno y el coseno de muchos ángulos distintos. Algo que hoy le preguntaríamos a una calculadora. Pero la función trigonométrica de la época no eran nuestro seno y coseno, sino la *cuerda* (fig. 1). Si tenemos una circunferencia, digamos de radio R, y si tenemos un ángulo θ en el centro abarcando cierto arco de la circunferencia, la **cuerda asociada al ángulo** θ es simplemente la longitud del segmento que une los dos extremos del arco. Le diremos cuerda(θ). Si queremos traducir a nuestra forma moderna,

$$\text{cuerda}(\theta) = 2R\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right), \qquad \text{cuerda}(180^\circ - \theta) = 2R\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right). \tag{1.3}$$

Para algunos valores especiales de θ la cuerda se puede hallar exactamente con facilidad. Por ejemplo, cuerda$(60^\circ) = R$, cuerda$(90^\circ) = \sqrt{2}R$, etc. Fijando un valor de R, esto permitía calcular con precisión algunas pocas cuerdas. Pero si necesitamos una tabla completa para las cuerdas de *todos los ángulos de* 1° *a* 180°, ¿cómo podemos hacerla?

Ptolomeo necesitaba una forma de combinar ángulos ya resueltos para obtener otros nuevos. O sea, si sabemos los valores de cuerda(A) y cuerda(B), querríamos poder hallar la cuerda$(A-B)$, o incluso la cuerda$(\frac{A}{2})$. Quizás ya sospeches un paralelismo con las fórmulas que presenté al principio. Y es para eso que Ptolomeo usa su teorema.

Ahora sí, apreciémoslo: el teorema de Ptolomeo es bellísimo por varias razones. Por ejemplo, si el cuadrilátero en cuestión es un rectángulo, tenemos $a = c$, $b = d$ y $e = f$, y nos devuelve $a^2 + b^2 = e^2$, el teorema de Pitágoras. Pero, más importantemente para Ptolomeo, su teorema está a un paso de darle una fórmula para la cuerda de una resta de ángulos. Para ver por qué, imaginemos que tenemos dos ángulos para los cuales ya conocemos sus cuerdas, A y B, y pongámoslos superpuestos en el centro de un semicírculo.

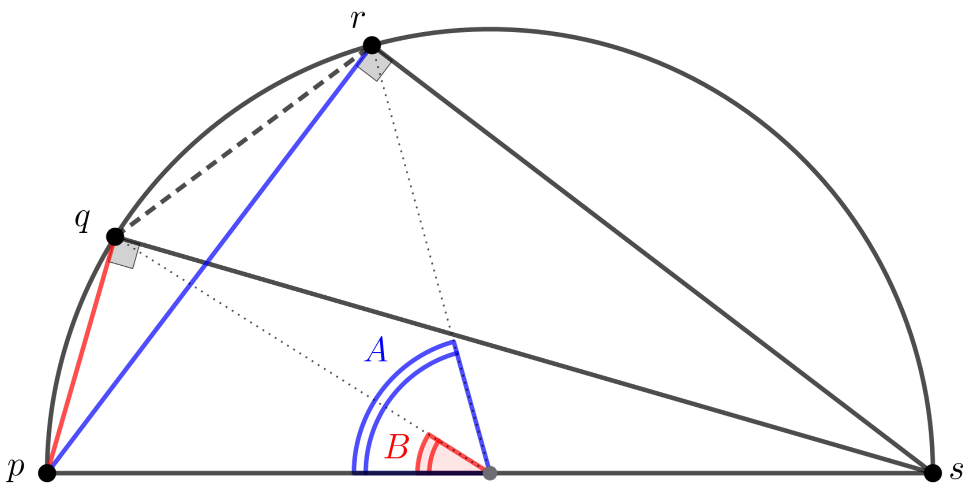

Figura 3: La cuerda de una resta de ángulos.

En este dibujo conocemos cuerda$(A) = \overline{pr}$, cuerda$(B) = \overline{pq}$ y el diámetro $\overline{ps} = 2R$. El primer truco es saber que, tan solo por estar inscritos en un semicírculo, los triángulos pqs y prs son triángulos rectángulos. Esto lo dejo para que el lector reflexione, pero era un hecho muy usado en geometría clásica. Sabiendo esto, en ambos triángulos conocemos dos de sus tres lados, así que podemos usar el teorema de Pitágoras para hallar $\overline{qs}$ y $\overline{rs}$. Finalmente, $pqrs$ es un cuadrilátero cuyos vértices se encuentran en una circunferencia, y del cual conocemos ya todos sus segmentos salvo $\overline{qr}$. El teorema de Ptolomeo es exactamente lo que necesitamos para hallar ese último lado, que es precisamente cuerda$(A - B)$.

Pero entonces, ¿la moraleja es que esto era “parecido” a nuestras fórmulas trigonométricas? No: lo que hicimos recién es exactamente lo mismo que la fórmula 1.1. Preparate. Notemos que $\overline{rs} =$ cuerda$(180^\circ - A)$ y $\overline{qs} =$ cuerda$(180^\circ - B)$. Si hacemos que el radio sea $R = \frac{1}{2}$, de modo que el diámetro $\overline{ps}$ sea 1, y aplicamos el teorema de Ptolomeo, tendremos:

$$\text{cuerda}(A-B) = \text{cuerda}(A)\,\text{cuerda}(180^\circ - B) - \text{cuerda}(B)\,\text{cuerda}(180^\circ - A).$$

Si usamos la ecuación 1.3 para traducir cuerdas a las funciones seno y coseno, obtendremos

$$\sin(\tfrac{A}{2} - \tfrac{B}{2}) = \sin(\tfrac{A}{2})\ \cos(\tfrac{B}{2}) - \sin(\tfrac{B}{2})\ \cos(\tfrac{A}{2})$$

y como esto vale para dos ángulos cualesquiera, ¡acabamos de probar la fórmula 1.1!

Para hallar una fórmula para la cuerda de la mitad de un ángulo, como 1.2, Ptolomeo usa un truco similar. Con esta técnica logra construir una tabla con los valores de las cuerdas de todos los ángulos hasta 180° en incrementos de $\frac{1}{2}^\circ$. Este trabajo numérico fue crucial para la adopción de su modelo: no solo publicó sus resultados, sino el método completo para construir la tabla, de forma que cualquiera pudiera detectar errores de copiado y mejorarla de ser necesario.

Esto cambió cómo veo estas fórmulas. Me produce algo muy especial abrir un texto tan antiguo, con pretensiones tan grandiosas, y encontrar estos mismos resultados que hoy son cotidianos, que a tantos alumnos se nos figuraron sin ninguna épica. Le da valor e historicidad a algo que no sabía que lo tenía. Pero es así: cada fórmula fue un hallazgo importante alguna vez, y saber sus historias vale la pena.