

Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina

Mates en la CIMA 2026

Martín Mereb

Universidad de Buenos Aires – IMAS-CONICET



La vida continúa y la Competencia Interuniversitaria Matemática Argentina (CIMA para los amigos) también. El año pasado participaron más de 40 equipos de varias casas de estudio del país y, en simultáneo y de manera independiente, se sumaron otros tantos de nuestros queridos vecinos Uruguay y Chile. Se llevó a cabo el 27 de agosto de 2025 con el formato habitual de 6 problemas de variados temas y niveles de dificultad, intentando siempre que los enunciados sean cercanos y comprensibles.

Fieles a nuestra misión de despertar curiosidades, creo que en esta entrega hemos logrado también un exitoso después de prueba, lleno de dudas y temas para debatir, tanto para quienes compiten como para quienes colaboran en la organización de tamaño evento. Si quedan cosas sin entender, es la idea.

Aprovecho para felicitar a los premiados por su destacada participación en el **certamen más prestigioso del país para estudiantes de grado**. Asimismo, agradezco a Leandro Cagliero y Juan Pablo Rossetti por el esfuerzo invertido durante más de una década en darle continuidad a la vieja y querida Competencia Paenza.

Recordamos que pueden encontrar todos los problemas en la **página web de la CIMA**, y que la invitación a participar se extiende a estudiantes de universidades de todo el territorio argentino.

Contando con los primos

El problema 2 de la prueba del 2025 trata sobre polinomios que toman valores enteros al ser evaluados en potencias de primos, pero que no necesariamente deben tomar valores enteros sobre todo \mathbb{Z} .

<https://sites.google.com/site/competenciacima/pruebas-antteriores/resultados-2025>

La pregunta surgió en forma natural durante un desayuno con colegas en una escuela AGRA en Cusco, ¡hace más de 10 años!, a raíz de varios resultados que dependen polinomialmente del tamaño de un cuerpo finito \mathbb{F}_q .

Para simplificar, pensemos en fórmulas como la que cuenta la cantidad de subespacios de \mathbb{F}_q^n de dimensión $k \leq n$, que viene dada por el polinomio

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \cdots (1 - q^{n-k+1})}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^k)}, \quad (1.1)$$

conocido como el coeficiente binomial gaussiano, ver [2], o aquella sobre la cantidad de polinomios mónicos irreducibles de grado n en $\mathbb{F}_q[x]$, dada por

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d, \quad (1.2)$$

donde μ es la función de Möbius y el parámetro d en la sumatoria recorre los divisores positivos de n .

Más allá de lo didáctico que pueda resultar deducir alguna de ellas (ambas conocidas pero no triviales), lo curioso es que son expresiones polinomiales en q , el tamaño del cuerpo finito, y, por lo tanto, devuelven valores enteros al evaluarse en potencias de primos.

Cabe pues preguntarse si dichos polinomios siguen contando algo al evaluarse en otros números naturales. Por ejemplo, la fórmula (1.2) cuenta la cantidad de collares diferentes de n piedras con k colores posibles, ver [4]. Por otro lado, la fórmula (1.1) goza de muchísimas interpretaciones combinatorias.

En aquel desayuno, pareció natural encontrar contraejemplos explotando en el hecho de que las potencias de primos esquivan a los números que arrojan resto 6 en la división por 8. Por ejemplo, el polinomio

$$Q(x) = \binom{x}{7} := \frac{x(x-1) \cdots (x-6)}{7!}$$

devuelve valores enteros para todo $x \in \mathbb{Z}$ y sólo es impar cuando $x \equiv 7 \pmod{8}$. Entonces el polinomio $P(x) = Q(x+1)/2$ deja de dar valores enteros cuando $x \equiv 6 \pmod{8}$.

Entre los equipos que resolvieron este problema, la mayoría encontró un ejemplo similar, con potencias de 2 en el denominador. Curiosamente, uno encontró un ejemplo con potencias de 3 y el equipo campeón, conformado por Julián Máximo Cabrera y Federico Damián Mierez (Universidad Nacional de Rosario), mostró una familia de ejemplos

$$\frac{x(x-p)}{p^3} \prod_{\substack{1 \leq k < p^3 \\ p \nmid k}} (x-k)$$

que funciona para cada primo p impar.

De tensiones y tensores

A continuación, y a pedido del público, me gustaría comentar un poco el problema de las cajitas de la prueba pasada.

Problema 4. *Se tiene una caja recta (prisma rectangular) de lados $1, \sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. Demostrar que no se puede llenar con cajitas rectas de base cuadrada y tamaños diferentes (sin espacios entre ellas, que se pueden rotar).*

Demostración. Supongamos una partición del prisma C_0 de lados $1, \sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ en cajitas de base cuadrada.

Buscamos un invariante $\phi(C)$ para los prismas C que se comporte como el volumen, pero que se anule en cajitas de base cuadrada y no se anule en C_0 , lo que nos conduce a un absurdo.

¿Qué significa comportarse como el volumen? Básicamente buscamos una función multilínea $\phi(C) = \phi(x, y, z)$ donde x, y, z representan las longitudes de los lados del prisma rectangular C . Al ser lineal en cada variable se tiene que $\phi(C_1 \cup C_2) = \phi(C_1) + \phi(C_2)$ cada vez que la unión $C_1 \cup C_2$ de dos prismas C_1 y C_2 también sea un prisma.

¿Cómo lograr su anulación en cajitas rectas de base cuadrada? En definitiva, se requiere que la ϕ se anule cada vez que dos de sus parámetros coincidan. Es decir, que además de multilínea, sea alternada. Esto propone como candidato a invariante alguna expresión que involucre a un determinante. Vamos a querer que sea de 3×3 para que resulte trilineal dado que el problema es en 3D.

¿De qué manera nos aseguramos la no anulación en C_0 ? Aquí juega un rol importante la independencia lineal de los números $1, \sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ en el \mathbb{Q} -espacio vectorial \mathbb{R} . Es decir, que la ecuación

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

sólo tiene como solución racional a la terna $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Al ser \mathbb{Q} -linealmente independientes, se puede extender el conjunto $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ a una base del \mathbb{Q} -subespacio vectorial de \mathbb{R} generado por todas las longitudes de los prismas involucrados en una eventual partición.

Nuestro candidato a invariante es

$$\phi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}$$

donde (a_x, b_x, c_x) son las coordenadas de x en dicha base, correspondientes a los vectores $1, \sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, respectivamente (las otras filas definidas de forma análoga).

De esta manera, $\phi(C_0)$ es igual a

$$\phi(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Al ser un determinante, se anula en las cajitas de base cuadrada. Por último, la multilinealidad conduce al absurdo $1 = 0$, que proviene de suponer una tal partición. \square

¿Dónde están las tensiones? Hay una familia de problemas de embaledado de rectángulos en partes con formas particulares. En el caso de partes cuadradas, un curioso abordaje en términos de las leyes de Ohm y de Kirchhoff fue encontrado en 1940 por Brooks, Smith, Stone y Tutte, ver [1], y elegantemente expuesto por Hosberger en el séptimo ensayo de [3]. No puedo dejar de mencionarlos, aunque no guarden relación directa con este problema.

¿Y dónde están los tensores? Quien tenga algo de familiaridad con el producto tensorial de módulos notará que toda partición de un prisma en cajitas corresponde a una identidad

algebraica entre elementos de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ y que $1 \wedge \sqrt{2} \wedge \sqrt{3}$ es no nulo en $\bigwedge^3 \mathbb{R}$. Pero esa, esa es otra historia...

Referencias

- [1] R. Brooks, C. Smith, A. Stone, W. Tutte. *The dissection of rectangles into squares*. Duke Math. J. 7 (1940), 312–340.
- [2] C. F. Gauß. *Summatio quarumdam serierum singularium*. Dieterich, 1808.
- [3] R. Honsberger. *Ingenuity in mathematics*. New Mathematical Library, 23. Random House, Inc., New York, 1970. viii+204 pp.
- [4] C. Moreau. *On distinct circular permutations*. Nouv. Ann. (2) XI. 309-314, 1872.