Emmy Noether, la madre del álgebra moderna

El prolífico camino de una genio matemática: desde la teoría invariante hasta la física teórica

Iris Amoia
Lautaro Ludueña

Unión Matemática Argentina

Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Prefacio

Fines del siglo XIX. Alemania. Nacía en la ciudad bávara de Erlangen, en el seno de una familia judía, una mujer cuyos aportes físicos y matemáticos dejarían una holladura imborrable en el porvenir de la ciencia. Las universidades no estaban preparadas. La sociedad no estaba lista. Pese a las innumerables adversidades sociales e históricas a las que tuvo que hacer frente, hubo algo que hizo imposible que se resignara; esa avidez por el saber e insaciable curiosidad que no solo hicieron que jamás desistiera de las matemáticas, sino también de enseñarlas y compartirlas con total abnegación, sin siquiera recibir un trabajo o remuneración oficiales. Es no menos que fascinante cómo la fuerza de una pasión la llevó a transgredir toda barrera cultural que se le atravesara, al punto de convertirse en la primera mujer en ser profesora universitaria de matemáticas en Alemania. Nos es inevitable pensar, no sin tristeza, en la inmensa cantidad de Emmys que nunca fueron, en las potenciales científicas que no corrieron la misma suerte y cuyos nombres hoy yacen en el olvido, o bajo la sombra de algún colega. Aprovechamos esta instancia no solo para visibilizar y remarcar la trayectoria y aportes de esta gigante de la ciencia, sino también para compartir esta pasión, tan familiar a todos los que con nuestros altos y bajos estudiamos esta hermosa carrera .

La señorita Noether fue el genio matemático creativo más importante que haya existido desde que comenzó la educación superior para las mujeres.

Albert Einstein

Capítulo 1

Un poco de historia

1.1. Evolución de las matemáticas en el siglo XIX

El siglo XIX fue un punto de inflexión en el desarrollo de las matemáticas. Un periodo donde esta disciplina se independiza como disciplina académica autónoma, nacen las revistas especializadas y aumenta la colaboración internacional. Respecto a los avances, el siglo XIX fue un período de formalización, abstracción, rigor y expansión sin precedentes.
Basta con tan solo mencionar algunos ejemplos para tomar conciencia del avance que experimentaron las matemáticas decimonónicas: Dedekind, Weierstrass y Cantor aritmetizaron el análisis, dejando de lado las intuiciones geométricas; se crea el álgebra booleana formalizando la lógica proposicional; Gauss, Lobachevsky y Riemann descubren las geometrías no euclidianas poniendo fin a los más de dos mil años de euclidianismo; Cauchy y Riemann desarrollan el análisis complejo moderno; Cantor construye los cimientos de la teoría de conjuntos, teoría central en el estudio de los fundamentos de las matemáticas; se formaliza la probabilidad y la estadística consolidándola como disciplina matemática, etc.
Aunque los desarrollos de las matemáticas decimonónicas que más nos interesan particularmente son los respectivos al campo del álgebra (donde Noether posteriormente contribuiría). Al ser de interés, haremos un breve paseo por los avances algebraicos de este siglo. Tenemos la teoría de grupos, que fue iniciada por el brillante y trágico genio de las matemáticas Évariste Galois (ya muerto en 1832) y desarrollada por Sylow, Cayley, Jordan y Lie.
Galois descubrió que cada ecuación tiene un grupo asociado (relacionado

con las permutaciones del conjunto de raíces que preserven las relaciones algebraicas en las mismas) y que varias propiedades de la ecuación (por ejemplo, ser resoluble por radicales) se codifica como propiedades de su grupo asociado. El descubrimiento de Galois es uno de los más profundos de toda la historia de las matemáticas. El joven brillante creó, sin saberlo, el germen de la teoría de grupos, que luego dominaría el álgebra y mucho más allá (física, simetría, teoría de códigos y otras áreas). Por su lado, Cayley fue uno de los primeros en tratar a los grupos como objetos independientes de las ecuaciones. Sylow desarrolla sus famosos teoremas relacionados a la estructura de los grupos finitos. Jordan trabajó en la clasificación de los grupos. Del lado del análisis, Sophus Lie, buscando herramientas similares a las de Galois pero para ecuaciones diferenciales, construyó los grupos continuos (hoy llamados grupos de Lie).
Otros avances algebraicos fueron la sistematización del álgebra lineal, indispensable para gran cantidad de disciplinas científicas, y la teoría algebraica de números. Por otro lado, Dedekind y Kronecker desarrollaron la teoría de anillos e ideales. Es aquí donde Noether hace su fenomenal aparición, descubriendo resultados angulares para tal teoría y marcando un antes y después en la forma de hacer álgebra.

1.2. Gotinga a la vanguardia

La univerisdad de Gotinga, situada en la ciudad homónima, fue considerada a lo largo del siglo XVIII Y XIX como el centro neurálgico de la investigación matemática en Alemania y, probablemente, uno de los más prestigiosos del mundo entero. Y no es para menos, pues esta casa de estudios albergó en su apogeo a matemáticos de la talla de Gauss, Riemann, Runge, Klein, Hilbert, y por supuesto, a Noether, sólo por mencionar algunos de los más sobresalientes. Fue fundada en 1734 por Jorge II, rey de Gran Bretaña y príncipe elector de Hannover. Poco después de su fundación, la sede de la reciente universidad fue trasladada del principado de Hannover a Gotinga, en los marcos de una Ilustración que experimentaba su máximo desarrollo en todo el norte de la región germana. Si bien los investigadores estaban bajo una férrea supervisión religiosa, contaban con mucha más autonomía para desempeñarse y estudiar que las generaciones anteriores a la Época de las Luces. A ello se sumaba la incorporación de principios más igualitarios, que permitían el acceso a la universidad a estudiantes encarecidos o de baja posición social. Uno de los más célebres matemáticos de la primera generación, si

no el más célebre de todos, fue Carl Friedrich Gauss, apodado "El príncipe de las matemáticas", cuya primera instancia en Gotinga duró apenas tres años, pero fue la más prolífica de su carrera. Logró abarcar en su etapa de investigador áreas tales como álgebra, geometría, estadística, teoría de números, e incluso incursionó en el magnetismo, óptica y hasta en la astronomía. Dentro de la inmensa cantidad de aportes que hizo a lo largo de toda su vida, algunos de los más destacables son la campana de Gauss, y el teorema de Gauss, revolucionario en el campo del electromagnetismo y precursor de dos de las cuatro ecuaciones de Maxwell. Pero Gauss no fue la única mente brillante de su generación. Otro prestigioso matemático llegaría para convertirse en el jefe del área de matemáticas de la Universidad entre 1859 y 1866: Bernhard Riemann, cuyos aportes, como la geometría riemanniana y el tensor de Riemann, fueron fundamentales para el desarrollo de la teoría de la relatividad general de Einstein. Por otra parte, a fines del siglo *XIX* y comienzos del siglo *XX*, una nueva generación de prominentes matemáticos floreció en Gotinga, teniendo a Felix Klein, presidente del área de matemáticas entre 1886 y 1913, como figura bisagra entre generaciones; esta nueva camada incluía a Carl Runge, David Hilbert, Hermann Minkowski, y a Noether.

Desde su fundación, la universidad atravesó por convulsas situaciones bélicas y sociales, tales como las guerras napoleónicas, la guerra franco-prusiana y la Primera Guerra Mundial, logrando mantenerse al margen y permanecer prácticamente intacta. No fue sino hasta el advenimiento de la Segunda Guerra Mundial que su actividad se vio paralizada por completo, a raíz de la promulgación de la llamada "Ley para la Restauración del Servicio Civil Profesional", que impedía a cualquier persona de origen judío desempeñarse como profesor o maestro en toda Alemania. El éxodo y la fuga de talento consecuentes a éstas medidas generaron un daño tal, que para 1934, sólo quedaba un profesor titular de todos los que ejercían previamente al ascenso del nazismo. El vaciamiento fue irremediable: con muchas de las mentes brillantes que hicieron de Gotinga una casa de estudios memorable, casi mítica, exiliadas en el exterior, una vez retomada la actividad, la facultad jamás volvió a gozar de la excelencia académica y popularidad que orgullosamente ostentaba.

Capítulo 2

Sobre Emmy Noether

2.1. Piano y lenguas para las niñas

Emmy Amalie Noether nació el 23 de marzo de 1882 en la ciudad bávara de Erlangen, Alemania. Fue la primera de cuatro hijos y la única descendiente mujer. Creció en el seno de una familia de fuerte carácter intelectual: su padre, Max Noether, perteneciente a una acomodada familia judía, era profesor universitario y matemático (considerado uno de los más destacados del siglo *XIX*) haciéndolo parte, junto a dos de sus hijos, Emmy Y Fritz Noether, de un linaje que albergó a diez matemáticos a lo largo de tres generaciones. Pese a haber contraído en su juventud una poliomielitis que le provocó una cojera permanente y otras secuelas físicas, jamás desistió de sus estudios. Culminó el *Gymnasium* estudiando desde su casa, para más tarde trabajar en diversas instituciones superiores. Con tan solo treinta años ya era un reconocido matemático, y llegó a desempeñarse como profesor asociado en la Universidad de Erlangen. Esta universidad fue anteriormente conocida como Academia Fridericiana y estaba situada en la aristocrática y populosa localidad de Bayreuth, pero dado que la convivencia con la nobleza y la alta sociedad resultó ser demasiado conflictiva y violenta para la comunidad de estudiantes, su sede fue trasladada a Erlangen a fines del siglo *XVIII*; ciudad que, al contar con apenas 15.000 habitantes, ofrecía un entorno mucho más propicio para albergar a la emergente facultad. Por otra parte, en el verano de 1880, a los treinta y cinco años, Max conoció a Ida Amalie Kaufmann, también proveniente de una pudiente familia judía de comerciantes establecida en Colonia, que contaba con destacados representantes en el ámbito matemático (su hermano, Wilhelm Kaufmann, fue profesor de matemáticas en la Universidad de

Berlín). Max e Ida contrajeron matrimonio y, dos años después, nació su primogéntita, Emmy. Años más tarde la familia se ampliaría con su hermano Alfred, que nació un año después; Fritz, que lo hizo al siguiente, y con Gustav Robert, nacido siete años después que Emmy.
Podemos decir que Emmy tuvo una infancia alegre y despreocupada, marcada por la escuela y por las acogedoras tertulias organizadas por su familia, donde participaban amistades y colegas del ámbito científico, con charlas que poco a poco hicieron que desde pequeña, tanto ella como sus hermanos, incorporaran un gran sentimiento universitario e interés por las discusiones científicas. Aunque sus primeros años transcurrieron en un entorno intelectualmente estimulante, su educación elemental y secundaria estuvo principalmente orientada hacia la música, con una fuerte instrucción en piano, y los idiomas, para los que mostró un especial interés y talento. Se conocen algunas anécdotas que dan cuenta del precoz ingenio que se vislumbraba en Emmy, como aquella en la que dejó atónitos a los adultos tras resolver un complicado acertijo lógico propuesto en un cumpleaños, siendo ella la única de todos los niños que logró resolverlo y con gran rapidez. Aunque no progresó significativamente en sus habilidades pianísticas, mantuvo su afición por la música a través de la danza, de la que se volvió una gran apasionada. Por otro lado, su escaso interés por las tareas domésticas reveló desde temprano su falta de vocación para los roles tradicionales asignados a las mujeres.
En 1889, dos años después de su fundación, Emmy ingresó a la escuela municipal de educación superior para niñas de Erlangen, donde fue una de las alumnas más destacadas y con las mejores calificaciones. Desde los siete hasta los quince años, cursó un plan de estudios con un fuerte énfasis en la enseñanza de lenguas, en especial el alemán, su lengua materna, y el francés, que se impartían a un alto nivel. Posteriormente, decidió continuar con su formación en idiomas y se trasladó a Ansbach para presentarse al examen oficial que otorgaba la acreditación para desempeñarse como profesora de inglés o francés, exigido por el Reino de Baviera. Pese a su completa formación y a su extraordinario desempeño en las pruebas (su media tanto en inglés como en francés superó por dos décimas la nota máxima establecida) sus posibilidades laborales y académicas se circunscribían a la docencia en institutos para niñas similares a aquel en el que ella estudió. Contra toda expectativa social y con una formación que parecía encaminada a una vida como institutriz y, eventualmente, ama de casa, Emmy tomó la decisión más audaz: en el semestre de invierno de 1900-1901, se inscribió en la Universidad de Erlangen. Lamentablemente, no se conservan registros que expliquen con

claridad qué la motivó a tomar tan insurgente decisión, en un contexto en el que, si bien se vislumbraban cambios en los paradigmas sociales, la educación superior, en especial las ciencias y matemáticas, prevalecía vedada para las mujeres. Emmy asistió a la sección II de la Escuela de Filosofía, junto con 984 compañeros varones y con la compañía de tan solo otra alumna mujer. De las pocas mujeres que asistían a la universidad, la gran mayoría lo hacía para mejorar como profesoras tomando clases de nivel superior, siempre y cuando contaran con la autorización de cada docente para poder asistir en calidad de oyente (como no podían matricularse, carecían del derecho a exámenes y a recibir calificaciones oficiales, y su asistencia estaba supeditada al consentimiento del docente). Si bien se desconoce cómo fue su paso por la universidad, se presume que su ingreso estuvo suavizado por la presencia de su padre en el ámbito universitario y por las amistades del mismo, que más adelante, terminarían siendo los colegas de la propia Emmy...
Mientras asistía a sus clases como oyente, Emmy se preparó para su examen de graduación, que una vez superado, le daría acceso a cualquier universidad. Un año después de aprobar su examen y quedar facultada para convertirse en una alumna oficial de cualquier universidad, el reino de Baviera, modificando las legislaciones vigentes, reconoció el derecho de las mujeres a la matriculación universitaria y obtención de un título oficial. Fue así como, con el cálido apoyo de su padre, que siempre reconoció los grandes dotes de Emmy, y con gran determinación y valentía, decidió seguir su más genuina pasión: las matemáticas.

2.2. Hacia el doctorado, entre invariantes y ambiciones

2.2.1. Bajo el ala de Gordan

Haciendo gala de su tan característica audacia, Emmy, gracias a la amistad que mantenía su padre con el matemático Felix Klein, decidió asistir como oyente en el semestre de invierno de 1903-1904, a Gotinga, su universidad soñada. Y no es por menos, pues no sólo era una de las tres facultades libres y fundadas al margen de la Iglesia en el Segundo Imperio alemán, sino también, como mencionamos anteriormente, la presencia de eminencias de la matemática enseñando y pululando por los pasillos era moneda corriente. Emmy disfrutaba de cada clase a la que podía asistir, aún sabiendo que de querer obtener un título oficial, debería retornar a Erlangen, pues Gotinga no se lo expediría. El nivel

de ambas casas de estudio adoleció de diferencias abismales, pues mientras Gotinga era un férvido centro de innovación matemática, Erlangen no dejaba de estar a la sombra de Berlín, que ejercía una poderosa influencia sobre los planes de estudio, marcados, en lo que respecta a la matemática, por la línea de Karl Weierstrass, Leopold Kronecker, y Ernst Kummer. Emmy regresó a Erlangen en octubre de 1904, y estuvo inscrita como alumna oficial en cursos de matemáticas; muchos de los cuales, eran dictados por su padre, que era profesor de pleno derecho, y por el matemático Paul Gordan, quien más adelante sería su director de tesis. Emmy sacó con provecho su carrera y logró doctorarse bajo la dirección de Gordan en julio de 1908, con una tesis titulada «Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form», (Sobre la construcción del sistema de formas de la forma bi-cuadrática ternaria). Para nuestro asombro, no obtuvo una distinción, tampoco fue un trabajo sobresaliente. Se sabe que obtuvo un *rite*, que si bien no era una mala calificación, era la más baja de las aprobatorias. Más allá de que su trabajo fuera considerado convencional, es probable que la evaluación del mismo haya estado influenciada por algún sesgo de género. El anticuado y rígido estilo de Gordan dejó su impronta en la tesis, y ésta no llegó a reflejar los dotes ni la creatividad con las que Emmy tiempo después revolucionaría el mundo del álgebra. Ella misma años más tarde renegaría de su tesis, calificándola, con la desmedida exigencia y rigor que la caracterizaba, de "basura".

Siete años más tarde a la presentación de su tesis, Emmy siguió en la Universidad de Erlangen, continuó trabajando sobre la teoría de invariantes y daba clases en el Instituto de Matemáticas en reemplazo de su padre. Aún habiendo culminado su doctorado, no pudo aspirar a la posición de profesora titular, pues el examen de habilitación estaba vedado para las mujeres. Su panorama era todo menos prometedor: Gordan y la Universidad de Erlangen se habían quedado estancados en la matemática algorítmica, y Emmy, si bien dictaba algunos cursos relacionados con sus propios proyectos de investigación, estaba limitada a dar clases sin ningún reconocimiento en sustitución de su padre. Desde la publicación de su tesis sólo logró publicar un artículo, una ampliación de los resultados de la misma. Podría haberse quedado en esa abúlica meseta de esterilidad académica, aburrida pero "cómoda", cómoda y a su vez demasiado revolucionaria. Podría haberse conformado asistiendo a su padre y trabajando con Gordan, que aún con la mejor de las intenciones, el camino que proponía no satisfacía las necesidades y aspiraciones de Emmy. Podría haber sido un registro más de los tantos

de la universidad, una alumna cuyo paso no dejaría una huella para la posteridad. ¿Qué fue lo que la hizo transgredir este paradigma, desafiando el pronóstico más desalentador posible? La respuesta podrá ser esperanzadora para algunos, cursi y trillada para otros, pero admirable y hermosa a fin de cuentas: su amor por las matemáticas (y claro, una serie de eventos no menos importantes que facilitaron poco a poco su salto hacia Gotinga). Uno de ellos fue la jubilación de Gordan en 1910, quien seguiría dando cursos junto a su sustituto Erhard Schmidt, un reconocido alumno de Hilbert, hasta su retiro definitivo de la docencia en 1911. Poco tiempo despúes, a la edad de 75 años, falleció, y su pérdida afectó profundamente a Emmy, pues éste había sido una figura crucial a lo largo de toda su carrera de estudiante e investigadora. Por otra parte, el sucesor de Gordan, el profesor y matemático austríaco Ernst Fischer, fue un portador de innovadoras ideas y nuevos enfoques, que le permitieron a Emmy incursionar en nuevas líneas de investigación, mucho más afines a sus intereses, haciendo de su influencia un elemento clave en su transformación. Profundizó en el álgebra abstracta y en el nuevo enfoque de Hilbert para el tratamiento de los invariantes, y pocos años después, ya era una reconocida especialista en la aproximación moderna a la teoría de invariantes. A fines de 1915, ocurrió lo que por tanto tiempo había ansiado: Hilbert y Klein le propusieron ejercer como profesora en Gotinga. Sus primeros pasos hacia su nueva vida fueron más bien un trago amargo: su madre falleció poco después de su traslado, y cuando regresó a Erlangen, corroboró que su padre ya no podía valerse por sí mismo. Las idas y venidas se hicieron constantes, y aún así, se mantuvo firme, tanto frente a las adversidades de la vida como a las duras matemáticas de su nueva casa de estudios.

2.2.2. La tesis

Como destacamos anteriormente, su tesis doctoral no tuvo la misma repercusión que tendrían sus aportaciones posteriores. No obstante, ésta demostró la maestría y el dominio que Emmy tenía de la teoría de invariantes, un campo que por entonces evolucionaba hacia formas cada vez más abstractas bajo la influencia de Hilbert. Aunque está lejos de ser uno de sus trabajos más citados, consideramos pertinente presentarla brevemente, pues resulta igualmente fascinante y constituye una pieza fundamental en una de las etapas más decisivas en su formación: su doctorado.

La teoría de invariantes fue un campo muy activo en la segunda mitad del siglo XIX y comienzos del siglo XX; con matemáticos como Cayley,

Clebsch y el ya mencionado Gordan, y en la tradición clásica, se buscaba describir los polinomios que permanecen invariantes ante transformaciones lineales de coordenadas. Noether siguió esta línea, pero aportó métodos rigurosos.
A continuación, introduciremos brevemente las nociones de formas ternarias, homogeneidad, acción de grupo lineal general, invariantes y covariantes, necesarias para poder comprender su tesis.

Definición 2.2.1 *Un polinomio $f(x_1, \dots, x_n)$ en n variables se dice* homogéneo de grado d *si todos sus monomios tienen grado total d, es decir, si cada monomio tiene la forma*

$$a_\alpha\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d$.

Definición 2.2.2 *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero (por ejemplo, $K = \mathbb{C}$). Denotamos por $S^d(K^n)$, el espacio vectorial de todas las formas homogéneas de grado d en n variables con coeficientes en K.*

Definición 2.2.3 *Una* forma ternaria de grado d es un polinomio homogéneo de grado d en tres variables x, y, z, o sea,

$$f(x, y, z) = \sum_{\substack{i+j+k=d \\ i,j,k \geq 0}} a_{ijk}\, x^i y^j z^k$$

con $a_{ijk} \in K$

Como definimos más arriba, la condición $i + j + k = d$ implica que todos los monomios de f tienen el mismo grado total, asegurando la homogeneidad.

Definición 2.2.4 *El grupo lineal general de grado n sobre un cuerpo K, denotado $GL_n(K)$ es el conjunto de todas las matrices invertibles $n \times n$, se define como*

$$GL_n(K) := \{A \in M_n(K) \mid \det(A) \neq 0\}$$

donde $M_n(K)$ es el conjunto de matrices nn con entradas en K, y la condición

$$det(A) \neq 0$$

garantiza que A sea invertible.
Ahora sí, en el caso $n = 3$, el grupo $GL_3(K)$ describe todas las transformaciones lineales invertibles de K^3.

Definición 2.2.5 *Un invariante de f es un polinomio $I(a_{ijk})$ en los coeficientes que permanece invariante a la acción de $GL_3(K)$.*

Definición 2.2.6 *Un covariante es un polinomio $C(a_{ijk}; x, y, z)$, que depende de los coeficientes y también de las variables x, y, z, y se transforma de forma determinada bajo la acción de $GL_3(K)$.*

Ahora sí, una vez presentados los preliminares, he aquí un breve resumen de la tesis: el trabajo doctoral de Noether se centra en la determinación explícita de un sistema completo de invariantes y covariantes asociados a una forma ternaria bi-cuadrática. Se considera una forma homogénea de grado 4 en tres variables,

$$f(x, y, z) = \sum_{\substack{i+j+k=4 \\ i,j,k \geq 0}} a_{ijk}\, x^i y^j z^k$$

El objetivo principal es obtener un conjunto finito de generadores del anillo de invariantes $K[a_{ijk}]^{GL_3(K)}$ [1], así como de los módulos de covariantes homogéneos, construidos como polinomios en los coeficientes a_{ijk} y en las variables (x, y, z), que se transforman de forma determinada bajo la acción del grupo.
En este caso específico, Emmy demuestra que el anillo de invariantes y los módulos de covariantes asociados a esta forma están finitamente generados.

2.3. Gotinga, un sueño hecho realidad

Sus primeros pasos hacia su nueva vida fueron más bien un trago amargo: su madre falleció poco después de su traslado, y cuando regresó a Erlangen, corroboró que su padre ya no podía valerse por sí mismo. Las idas y venidas se hicieron constantes, y aún así, se mantuvo firme, tanto frente a las adversidades de la vida como a las duras matemáticas de su nueva casa de estudios. Durante estos años Emmy ejercería la docencia e investigación, y no sólo se acabaría consagrándose como la madre del álgebra abstracta, sino también revolucionaría la comprensión de los teoremas de conservación de la física, como ampliaremos más adelante.

2.3.1. Una profesora brillante

Los albores de la carrera docente de Emmy fueron turbulentos y estuvieron marcados por las devastadoras consecuencias que la Primera

[1] Es decir, el subconjunto de polinomios invariantes bajo la acción $GL_3(K)$

Guerra Mundial tuvo para Alemania. A pesar a las numerosas intervenciones a favor de Emmy por parte de destacados miembros de la comunidad científica internacional, el tratamiento que recibía de las autoridades alemanas y del ministerio prusiano de Ciencias, Arte y Educación Pública no cambió, y jamás le concedieron el carácter oficial de profesora, dejándola sin reconocimiento económico ni académico. Personalidades de la talla de Hermann Weyl bregaron por el reconocimiento pleno de los derechos de Emmy como docente, con célebres frases como «Cuando fui llamado de forma permanente a Gotinga en 1930, con toda firmeza intenté obtener una posición mejor para Emmy Noether, ya que me avergonzaba ocupar un puesto privilegiado por encima de quien sabía que me superaba como matemático en muchos aspectos». También David Hilbert, en su intento de conseguirle una plaza oficial, dijo: «Caballeros, el Consejo no es un sauna, no veo por qué una mujer no puede formar parte de él». Aunque Weyl no logró formalizar la situación de Emmy dentro de Gotinga, Emmy, que impartía lecciones durante un semestre extraordinario programado para veteranos de guerra, fue reconocida en 1919 como *Privatdozent*; pudo dictar cursos y clases, aunque permanecía excluida del cuerpo docente oficial de la facultad. Tristemente, por más ascensos que le concedieran, ninguno implicaba una mejora en su situación legal y económica. Tres años después de que se le permitiera dar clases, se le otorgó el grado de *Außerordentlicher Professor* (profesora asociada), lo que significaba ser profesora de tiempo completo sin remuneración alguna.

En 1923, Emmy recibió un contrato para enseñar álgebra, incluyendo clases teóricas y prácticas, y por fortuna, luego de haber trabajado por más de quince años como docente, primero en su universidad de origen y luego en Gotinga, consiguió tener unos ingresos módicos pero estables. Emmy fue una docente de la que sólo los más brillantes estudiantes podían beneficiarse, pues sus habilidades pedagógicas no estaban a la altura del vasto conocimiento que manejaba. No fue hasta el advenimiento de la Segunda Guerra Mundial que su carrera profesional llegó a término, cuando, junto con muchos otros científicos de origen judío, fue suspendida y excluida de cualquier actividad y relación con la universidad.

2.3.2. Los chicos Noether

El contrato de 1923 implicó un hito no sólo en la vida de Emmy, sino también en la de muchas otras mujeres que incitadas por una revolucionaria presencia femenina en el cuerpo docente decidían emprender sus

estudios universitarios en matemáticas. Es más, el primer estudiante doctorado bajo la tutela de Emmy Noether fue una mujer, filósofa y matemática alemana, Grete Hermann, que lo hizo en 1925. Fue en este propicio período donde Emmy comenzó a elaborar sus propias ideas y dirigir y promover tesis doctorales, rodeándose de un grupo de un grupo de brillantes estudiantes que se beneficiaban de sus lecciones y con los que compartía su férvida pasión por las matemáticas, conocido como Los chicos Noether. En estre grupo, además de la mencionada Grete Hermann, se encontraban célebres figuras como Levitzki, Krull, Schmeidler y Witt, sólo por mencionar algunos. Este grupo se convirtió en el centro neurálgico de la investigación matemática en Gotinga, tanto así que no sólo contaba con la presencia de profesores ya consolidados, sino también con la de célebres matemáticos como Emil Artin (matemático con el que más tarde recibiría el Premio Ackermann-Teubner Memorial), Helmut Hasse, y el ruso Pavel Alexandroff.

Capítulo 3

Trabajos Matemáticos

Las contribuciones de Noether a las matemáticas fueron principalmente en el terreno del álgebra abstracta. A continuación presentaremos sus aportes y algunas aplicaciones de los mismos.

3.1. Preliminares

Presentaremos la maquinaria matemática con la que vamos a trabajar (principalmente álgebra abstracta y topología). Omitiremos las demostraciones. Si el lector desea profundizar, puede consultar [4].

Anillos

Definición 3.1.1 *Un **anillo** es una terna $(A, +, \cdot)$ donde A es un conjunto no vacío provisto de dos operaciones binarias:*

- *Una suma $+ : A \times A \to A$ tal que $(A, +)$ es un grupo abeliano,*
- *Un producto $\cdot : A \times A \to A$ tal que:*
  - *El producto es asociativo: para todo $a, b, c \in A$, se tiene $(a{\cdot}b){\cdot}c = a{\cdot}(b{\cdot}c)$,*
  - *El producto es distributivo respecto de la suma: para todo $a, b, c \in A$, se cumple*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad y \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

*Un anillo se dice **conmutativo** si $a{\cdot}b = b{\cdot}a$ para todo $a, b \in A$, y se dice **unitario** si existe un elemento $1 \in A$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo $a \in A$. Al elemento 1 se lo llama **identidad**.*

Definición 3.1.2 *Sea A un anillo y $a, b \in R$. Diremos que a, b son* ***divisores de cero*** *si $ab = 0$.*

Definición 3.1.3 *Sea A un anillo conmutativo. Diremos que A es un* ***domino integro*** *si no tiene divisores de cero.*

Definición 3.1.4 *Sea A un anillo con identidad 1_A, diremos que A es un* ***anillo de división*** *si, para todo $a \in R \setminus \{0\}$, existe $b \in R$ tal que $ab = ba = 1_A$.*

Definición 3.1.5 *Un cuerpo es un dominio integro que, a su vez, es un anillo de división.*

El cuerpo es el tipo de anillo más «bonito» para trabajar. Es conmutativo, no tiene divisores de cero y todo elemento no nulo tiene un inverso multiplicativo.

Ejemplo 3.1.1 (Los cuerpos usuales) *Como ejemplos de cuerpos tenemos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}_p$, donde p es primo.*

Ejemplo 3.1.2 (El anillo de matrices $n \times n$) *El anillo de matrices $M(n \times n, \mathbb{F})$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo, es un anillo no conmutativo.*

Ejemplo 3.1.3 (Los cuaterniones) *Sea*

$$\mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

El conjunto $\mathbb{H}$, dotado de la suma y multiplicación naturales, admite estructura de anillo de división no conmutativo.

Definición 3.1.6 *Sean A y B anillos. Un* ***homomorfismo*** *entre A y B es una función $\varphi : A \to B$ tal que*

- *$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, para todo $a, b \in A$;*
- *$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para todo $a, b \in A$.*

Diremos que φ es un ***monomorfismo*** *si es inyectiva, un* ***epimorfismo*** *si es suryectivo y un* ***isomorfismo*** *si es biyectivo.*

Definición 3.1.7 *Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo. Definimos*

$$\ker \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$$
$$\operatorname{im} \varphi = \{b \in B \mid \exists a \in A, \varphi(a) = b\}$$

Observación 3.1.1 *Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo. Entonces, φ es un monomorfismo si y sólo si $\ker \varphi = \{0\}$.*

Sea A un anillo conmutativo con 1_A, notemos que el mapeo $n \mapsto n1_A$ induce un homomorfismo $\mathbb{Z} \to A$.

Definición 3.1.8 *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Definimos*

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ g : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid g(i) \in A_i \right\}.$$

A una función $g \in \prod_{i\in I} A_i$ la podemos denotar $(g(i))_{i\in I}$.

Definición 3.1.9 (Anillo producto) *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos. El conjunto $\prod_{i\in I} A_i$ admite estructura de anillo con las operaciones definidas por*

- $(g + h)(i) = g(i) + h(i)$;
- $(g \cdot h)(i) = g(i) \cdot h(i)$.

A este anillo lo denominamos ***anillo producto****.*

Definición 3.1.10 (Producto débil de anillos) *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos. Tomemos el conjunto*

$$\bigoplus_{i\in I} A_i = \left\{ g \in \prod_{i\in I} A_i \mid g(i) \neq 0 \text{ para una cantidad finita de } i\text{'s} \right\}$$

Este conjunto admite estructura de anillo con las operaciones definidas por

- $(g + h)(i) = g(i) + h(i)$;
- $(g \cdot h)(i) = g(i) \cdot h(i)$.

A este anillo lo denominamos ***producto débil****.*

Notemos que, si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de anillos, $\bigoplus_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} A_i$.

Ideales

Definición 3.1.11 (Ideal) *Sea A un anillo. Un* ***ideal*** *izquierdo de A es un subconjunto $I \subseteq A$ tal que:*

- *I es un subgrupo aditivo de $(A, +)$,*
- *para todo $a \in A$ y $x \in I$, se tiene $a \cdot x \in I$.*

Análogamente, un ***ideal derecho*** *satisface que* $x \cdot a \in I$ *para todo* $x \in I$ *y* $a \in A$. *Un* ***ideal bilateral*** *o simplemente* ***ideal*** *es un subconjunto* $I \subseteq A$ *que es ideal izquierdo y derecho simultáneamente, es decir, para todo* $a \in A$ *y* $x \in I$*, se tiene* $a \cdot x \in I$ *y* $x \cdot a \in I$.

Observación 3.1.2 *Si* A *es un anillo conmutativo, todo ideal es bilateral.*

Observación 3.1.3 *Sea* $\varphi : A \to B$ *un homomorfismo de anillos. Entonces,* $\ker \varphi$ *es un ideal bilateral de* A.

Ejemplo 3.1.4 *Sea* $\mathbb{Z}$ *equipado con la suma y la multiplicación usuales, entonces* $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *es un ideal, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.1.5 *El producto débil de una familia de anillos es un ideal bilateral del producto de la familia.*

Definición 3.1.12 *Sea* A *un anillo y* $X \subseteq A$ *un subconjunto. Definimos el* ***ideal generado por*** X *como*

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq I \text{ ideal de } A} I.$$

Es decir, es el menor ideal que contiene al conjunto X.

Proposición 3.1.1 *Sea* A *un anillo conmutativo con identidad y* $X \subseteq A$*, entonces los elementos de* $\langle X \rangle$ *son combinaciones lineales de elementos de* X *con coeficientes en* A.

Definición 3.1.13 *Sea* A *un anillo e* I *un ideal. Definimos la relación en* A, $a \sim a'$ *si y solo si* $a - a' \in I$. *Esta relación es de equivalencia. Denotamos por* A/I *al conjunto de clases de equivalencia. Este conjunto admite estructura de anillo con las operaciones definidas de forma natural.*

Ejemplo 3.1.6 *Sea* $A = \mathbb{Z}$ *y* $I = n\mathbb{Z}$. *Tenemos que* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *son los enteros módulo* n.

Cocientar por un ideal es, de forma intuitiva, hacer colapsar sobre el cero a todos los elementos del ideal. La razón por la que pedimos que sea un ideal es para que el conjunto de clases de equivalencia (el conjunto cociente) se a su vez un anillo.

Teorema 3.1.1 (Primer teorema de isomorfismo) *Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos e $I \subseteq \ker \varphi$ un ideal de A. Entonces, existe un único homomorfismo $\widetilde{\varphi} : A/I \to B$ tal que $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \widetilde{\varphi}$ y hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \\ A/I \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

Observemos que $\widetilde{\varphi}$ es un isomorfismo si y sólo si φ es suryectiva e $I = \operatorname{Ker} \varphi$.

Definición 3.1.14 *Sea A un anillo y P un ideal de A. Diremos que P es un ideal* ***primo*** *si, para todo $a, b \in R$, se tiene que*

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ o } b \in P.$$

Ejemplo 3.1.7 *Sea $A = \mathbb{Z}$ y $P = p\mathbb{Z}$, donde p es un número primo.*

Teorema 3.1.2 *Sea A un anillo conmutativo con identidad y P un ideal. Entonces, P es primo si y sólo si A/P es un dominio integro.*

Definición 3.1.15 *Sea A un anillo y M un ideal. Diremos que M es un ideal* ***maximal*** *si es no trivial y, para todo ideal I, se cumple que $M \subseteq I \Rightarrow M = I$.*

Proposición 3.1.2 *Sea A un anillo conmutativo con identidad. Entonces, todo ideal maximal es primo.*

Teorema 3.1.3 *Sea A un dominio integro y M un ideal. Entonces, A/M es un cuerpo si y solo si M es maximal.*

Anillo de polinomios

Definición 3.1.16 *Sea A un anillo conmutativo con identidad 1_A. Definimos $A[x]$ como el conjunto $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A$ y definimos $x \in A[x]$ tal que $x(2) = 1_A$ y $x(n) = 0$, para todo $n \neq 2$. Es decir,*

$$x = (0, 1_A, 0, 0, \dots).$$

A los elementos de $R[x]$ los denominamos ***polinomios****. Este conjunto admite estructura de anillo con las operaciones*

- *La suma usual;*

- $g \cdot h = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i+j=n} g(i)h(j)$. *Es decir,* $(g \cdot h)(n) = \sum_{i+j=n} g(i)h(j)$.

Notar que el producto está bien definido, pues, al ser el producto débil, esa suma es finita.

Observación 3.1.4 *Sea A un anillo conmutativo y $A[x]$ el conjunto de polinomios. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$x^n = (\overbrace{0, \dots, 0}^{n \text{ lugares}}, 1_R, 0, 0, \dots).$$

Sea $g \in A[x]$ y $n = \text{máx}\{k \in \mathbb{N} \mid g(k) \neq 0\}$, entonces $g = \sum_{i=1}^{n} g(i)x^i$. Es decir, si $g = (a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ entonces $g = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. Al número natural n lo denominamos **grado del polinomio** y lo denotamos por $\text{gr}(g)$.

Sea $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in R[x]$ y $r \in R$, denotamos como $f(r)$ al elemento de R de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i r^i$.

En algunas ocasiones denotaremos como $f(x)$ al polinomio $f \in A[x]$.

Sea $f = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i \in A[x]$, denotamos $f(a) = \sum_{i=1}^{n} b_i a^i \in A$. A esto lo llamamos «evaluar el polinomio f en el elemento a». Esto nos permite definir, para $a \in A$, un homomorfismo $A[x] \to A$ dado por $f \mapsto f(a)$. Lo denominamos «homomorfismo evaluación en a».

Teorema 3.1.4 *Sean A y B anillos conmutativos con identidad*[1] *y $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Para cada $b \in B$, existe un único homomorfismo de anillos $\widetilde{\varphi} : A[x] \to B$ tal que $x \mapsto B$ y hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & B \\
A[x] \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

Idea de la demostración. Tomamos el mapeo evaluación dado por

$$\widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i)s^i.$$

Hay que verificar que efectivamente es un homomorfismo. ■

[1] El resultado se puede generalizar para B no necesariamente conmutativo. Simplemente pidiendo que el subanillo de B generado por $\varphi(A) \cup \{b\}$ sea conmutativo.

Sea A un anillo conmutativo con identidad, tomemos el anillo de polinomios $A[x]$. Podemos, a su vez, tomar el anillo de polinomios $A[x][y]$. A este anillo lo denotamos por $A[x, y]$, el anillo de polinomios en dos variables.

Definición 3.1.17 *Sea A un anillo conmutativo con identidad y $n \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$\begin{aligned} A[x_1, x_2] &= A[x_1][x_2] \\ A[x_1, \ldots, x_n] &= A[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]. \end{aligned}$$

Teorema 3.1.5 *Sean A y B anillos conmutativos y $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Para cada $b_1, \ldots, b_n \in B$, existe un único homomorfismo de anillos $\widetilde{\varphi} : A[x_1, \ldots, x_n] \to B$ tal que $x \mapsto b$ y hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & B \\ A[x_1, \ldots, x_n] \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.1.8 *Tenemos el siguiente isomorfismo de anillos*

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \cong \mathbb{C}.$$

A modo de curiosidad, demostraremos este ejemplo.

Demostración. Sea $\iota : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ la inclusión. Claramente ι es un homomorfismo. Por los teoremas anteriores, el mapeo $x \mapsto i$ induce el homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[x] &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(i) \end{aligned}$$

Observemos que φ es un epimorfismo. Probemos que $\langle x^2 + 1 \rangle = \operatorname{Ker} \varphi$.

($\subseteq$) Notemos que $x^2 + 1 \in \operatorname{Ker} \varphi$.

($\supseteq$) Si $f \in \operatorname{Ker} \varphi$, claramente no puede ser de grado 1.

- Si f es de grado 2 entonces $f = ax^2 + bx + c$ y
$$0 = ai^2 + bi + c$$
Es decir, $c = a$ y $b = 0$, por ende $f = a(x^2 + 1)$, con $a \in \mathbb{R}$.
- Si $\operatorname{gr}(f) \geq 3$ entonces existen $q, r \in \mathbb{R}[x]$ tales que $r = 0$ o $\operatorname{gr}(r) < 2$ y $f(x) = q(x)(x^2 + 1) + r(x)$. Por ende, $0 = r(0)$. Como $\operatorname{gr}(r) < 2$, tenemos que $r(x) = 0$.

Por ende, tenemos el isomorfismo $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \to \mathbb{C}$. ■

Anillo de fracciones

El anillo de fracciones no es más que una generalización de la construcción de los racionales a partir de los enteros. Así que nos será de extrema utilidad recordar tal construcción: Tomamos el conjunto $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ y definimos la relación

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si y solo si } ad = bc.$$

Notar que la relación $\sim$ es de equivalencia. Definimos $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\sim$. Y definimos las operaciones

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

Notar que estas operaciones pasan al cociente. Por ende, podemos definirlas para el conjunto cociente $\mathbb{Q}$. Denotamos a la clase de equivalencia $[(a, b)] = \frac{a}{b}$.

Definición 3.1.18 *Sea A un anillo y $S \subseteq A$. Diremos que S es un* ***subconjunto multiplicativo*** *si, para todo $a, b \in S$ tenemos que $ab \in S$.*

Definición 3.1.19 *Sea A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ multiplicativo. Definimos la siguiente relación en $A \times S$:*

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow s_1(as' - a's) = 0, \text{ para algún } s_1 \in S.$$

Observación 3.1.5 *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia. Y si A no tiene divisores de cero, entonces*

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow as' - a's = 0.$$

Definición 3.1.20 *Sea A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ multiplicativo. Denotamos por AS^{-1} al conjunto de clases de equivalencia inducido por la relación $\sim$. Y a la clase $[(a, s)]$ la denotamos como a/s.*

Observación 3.1.6 *El conjunto AS^{-1} admite estructura de anillo con las siguientes operaciones*

$$a/s + a'/s' = (as' + a's)/ss' \text{ y } a/s \cdot a'/s = aa'/ss'.$$

A AS^{-1} lo denominamos ***anillo de fracciones****.*

Teorema 3.1.6 *Sea A un domino integro, entonces $S = A - \{0\}$ es multiplicativo. Además, AS^{-1} es un cuerpo.*

A este lo llamamos **cuerpo de fracciones de** A, lo denotamos como $\mathbb{F}(A)$. Además, tenemos la incrustación

$$\begin{aligned} \iota : A &\hookrightarrow AS^{-1} \\ a &\mapsto a/1_A \end{aligned}$$

Teorema 3.1.7 *Sea A un dominio integro y $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos tal que $\varphi(A) \subseteq \mathcal{U}(B)$. Entonces, existe un único homomorfismo de anillos $\widetilde{\varphi} : \mathbb{F}(A) \to B$ tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & B \\ \mathbb{F}(A) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Definición 3.1.21 *Sea R un dominio integro, definimos el* ***cuerpo de fracciones en*** *n* ***variables*** *como*

$$R(x_1, \ldots, x_n) := \mathbb{F}(R[x_1, \ldots, x_n]).$$

Álgebras y extensiones de anillos

Definición 3.1.22 *Sea R un anillo conmutativo con identidad. Una R-álgebra es un anillo A con identidad equipado con un homomorfismo $\eta : R \to A$ tal que $\eta(r)a = a\eta(r)$, para $r \in R$ y $a \in A$.*

Ejemplo 3.1.9 *Sea R un anillo conmutativo con identidad, entonces $R[x_1, \ldots, x_n]$ es una R-álgebra.*

La idea de álgebra sobre un anillo busca generalizar el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo. En este caso los elementos de R son el análogo a los escalares y los elementos de A son los análogos a los vectores. Por esta razón, denotamos $r \cdot a := \eta(r)a$, para todo $a \in A$ y $r \in R$, que es análogo al producto por escalares.[2]

Definición 3.1.23 *Sea R un anillo conmutativo con identidad y A una R álgebra conmutativa. Si el homomorfismo $\eta : R \to A$ es inyectivo, diremos que A es una* ***extensión de*** *R.*

[2]El concepto de álgebra sobre un anillo se relaciona con un concepto muy importante en el álgebra, el de Módulo.

Definición 3.1.24 *Sea A una extensión conmutativa de R y $X \subseteq A$. Denotamos por $R[X]$ al subanillo de A generado por $X \cup \eta(R)$. Es decir*

$$R[X] := \bigcap_{\eta(R) \cup X \subseteq T} T$$

En otras palabras, $R[X]$ es el «menor» subanillo de A que contiene a $\eta(R)$ y X.

Proposición 3.1.3 *Si $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces*

$$R[X] = R[a_1, \ldots, a_n] := \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in R[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

Definición 3.1.25 *Sea R un anillo conmutativo con identidad y A una extensión de R. Diremos que A es finitamente generada si existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \cong R[a_1, \ldots, a_n]$.*

Definición 3.1.26 *Sea A una extensión de R y $a \in A$. Diremos que a es* ***entero*** *sobre R si existe un polinomio mónico $f \in R[x]$ tal que $f(a) = 0$.*
Diremos que A es una ***extensión entera*** *si todo elemento es entero sobre R.*

Extensiones de cuerpos

Proposición 3.1.4 *Sean K un cuerpo, R un anillo y $\varphi : K \to R$ un homomorfismo. Si φ es no nulo, entonces es un monomorfismo.*

Definición 3.1.27 *Sean F y E cuerpos, diremos que E es una extensión de F, denotado por E/F, si $F \hookrightarrow E$.*

Definición 3.1.28 *Sea E/F una extensión de cuerpos y $\alpha \in E$. Diremos que α es* ***algebraico*** *sobre F si existe un polinomio $f \in F[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Caso contrario, diremos que α es* ***trascendente****. Diremos que E/F es algebraica si todo elemento de E es algebraica sobre F. De no ser así, la extensión se denomina trascendente en otro caso.*

Proposición 3.1.5 *Sea E/F una extensión de cuerpos. Si es de grado finito, entonces es algebraica.*

La recíproca no es cierta. Si se toma el conjunto de los números primos $\mathbb{P}$, la extensión $\mathbb{Q}(\{\sqrt{p}\}_{p\in\mathbb{P}})/\mathbb{Q}$ es de grado infinito pero es algebraica.

Definición 3.1.29 *Diremos que un cuerpo F es* ***algebraicamente cerrado*** *si todo polinomio $f \in F$ tiene una raíz en F.*

Ejemplo 3.1.10 *El cuerpo* $\mathbb{C}$ *es algebraicamente cerrado.*

Definición 3.1.30 *Sea* K *un cuerpo, llamamos* ***clausura algebraica*** *de* K *a una extensión algebraica de* K *que es algebraicamente cerrada.*

Teorema 3.1.8 *La clausura algebraica de un cuerpo es única salvo isomorfismo.*

Sea K un cuerpo, denotaremos por $\overline{K}$ a su clausura algebraica.

Definición 3.1.31 *Sea* R *un anillo conmutativo y con identidad y* A *una extensión de* R*. Diremos que* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ *son* ***algebraicamente independientes*** *si* $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$*, para todo* $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$*.*

Definición 3.1.32 *Sea* F/K *una extensión de cuerpos, una* ***base trascendente*** *de* F *sobre* K *es un conjunto,* $X \subseteq F$*, algebraicamente independiente y maximal sobre* K*.*

Observación 3.1.7 *Todas las bases trascendentes de una extensión de cuerpos tienen la misma cardinalidad.*

A esta cardinalidad la llamaremos **grado de trascendencia**.

Ejemplo 3.1.11 *Sea* F *un cuerpo, entonces* $F(x)/F$ *es una extensión trascendental y* x *es trascendente sobre* F*. Además,* $\{x\}$ *es una base trascendente. En otras palabras, el grado de trascendencia sobre de* $F(x)$ *sobre* F *es* 1*.*

Ejemplo 3.1.12 *El grado de trascendencia de la extensión* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, e)/\mathbb{Q}$ *es* 1*. Pues,* $\sqrt{2}$ *es algebraico sobre* $\mathbb{Q}$ *pero* e *no lo es.*

Ejemplo 3.1.13 *El grado de trascendencia de* $\mathbb{C}$ *o* $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{Q}$ *es la cardinalidad del continuo.*

Ejemplo 3.1.14 *El grado de trascendencia de la extensión* $\mathbb{Q}(\pi, e)/\mathbb{Q}$ *es desconocido, claramente es* 1 *o* 2*. Pero, actualmente, no sabemos si* π *y* e *son algebraicamente independientes.*

Proposición 3.1.6 *Sea* F/K *una extensión de cuerpos, entonces* $S \subseteq F$ *es una base trascendente si y solo si la extensión* $F/K(S)$ *es algebraica.*

3.2. Anillos de Noether

Definición 3.2.1 *Sea R un anillo conmutativo. Una cadena ascendente de ideales en A es una familia de ideales $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que $I_n \subseteq I_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 3.2.2 (Anillo noetheriano) *Sea R un anillo conmutativo. Diremos que R es* ***noetheriano*** *si para toda cadena ascendente de ideales $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_m$, para todo $n \geq m$. A esta propiedad la denominamos* ***condición de cadenas ascendentes****.*

Lo que vuelve a los anillos de Noether *los anillos más interesantes dentro del álgebra conmutativa* son las siguientes equivalencias y sus consecuencias.

Teorema 3.2.1 *Sea R un anillo conmutativo, entonces R es un anillo noetheriano si y solo si todo subconjunto de ideales de R tiene un elemento maximal.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea S un conjunto no vacío de ideales de R que no tiene elementos maximales. Sabemos que existe $I_0 \in S$, pues es no vacío. Además, para cada $I \in S$ existe al menos un $I' \in S$ tal que $I \subsetneq I'$.
Es decir, existe $I_1 \in S$ tal que $I_0 \subsetneq I_1$. De esta forma definimos (axioma de elección) una familia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $I_n \subsetneq I_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo cual contradice la condición de cadenas ascendentes.

($\Leftarrow$) Sea $C = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena ascendente de ideales de R. Por hipótesis, C tiene un elemento maximal I. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I = I_n$.

■

Teorema 3.2.2 *Sea R un anillo conmutativo. Entonces, R es noetheriano si y solo si todo ideal de R es finitamente generado.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que existe un ideal I que no es finitamente generado. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$. Entonces, los ideales $I_n = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ forman una cadena ascendente de ideales que no se estabiliza. Lo que contradice la condición de cadenas ascendentes.

($\Leftarrow$) Sea $C = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena ascendente de ideales. Entonces $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ es un ideal de R. Por ende, I es finitamente generado. Sea $\{a_1, \ldots, a_k\}$ un conjunto de generadores de I. Por definición, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_1, \ldots, a_k \in I_n$. Es decir, $I \subseteq I_n$.

■

Proposición 3.2.1 *Sea $\varphi : R \to S$ un epimorfismo de anillos. Si R es noetheriano, entonces S es noetheriano.*

Corolario 3.2.1 *Sea R un anillo noetheriano e I un ideal de R. Entonces, el anillo cociente R/I es noetheriano.*

Ejemplo 3.2.1 *Todo cuerpo es noetheriano.*

Teorema 3.2.3 (Teorema de la base de Hilbert) *Sea R un anillo conmutativo y $n \in \mathbb{N}$. Si R es noetheriano, entonces $R[x_1, \ldots, x_n]$ también lo es.*

Demostración. Solo necesitamos probar que $R[x]$ es noetheriano. Y, por el teorema anterior, eso se reduce a probar que todo ideal de $R[x]$ es finitamente generado.

Sea $J \subseteq R[x]$ un ideal. Definimos $I_n \subseteq R$ de la siguiente forma: $r \in I$ si y solo si $r = 0$ o r es el coeficiente director de algún polinomio en J. Notemos que I_n es un ideal de R, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si r es el coeficiente director del polinomio de grado n, $f \in J$, entonces r es el coeficiente director del polinomio xf, que es de grado $n+1$ y está en J (pues J es un ideal). En otras palabras, $I_n \subseteq I_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como R es noetheriano, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $I_m = I_n$, para todo $m \leq n$. Además, I_n es finitamente generado. Sea $I_n = \langle r_{ni_1}, \ldots, r_{ni_n} \rangle$, sea f_{nj} un polinomio en J de grado n y r_{nj} como coeficiente director, para todo $1 \leq n \leq m$ y $n1 \leq j \leq ni_n$. Definimos el conjunto

$$\{f_{nj} \mid 1 \leq n \leq m \text{ y } n1 \leq j \leq ni_n\}.$$

Probemos que $J = \langle X \rangle$. La contención $\langle X \rangle \subseteq J$ es trivial. La contención recíproca la probaremos por inducción.

- Caso base: El conjunto de polinomios de grado 0 en J es exactamente I_0, que está contenido en $\langle X \rangle$.
- Supongamos que todo polinomio de grado $k-1$ en J está contenido en $\langle X \rangle$. Sea $g \in J$ de grado k.
  - Si $k \leq m$, y $r \in I_k$, entonces $r = \sum_{j=1}^{i_k} s_j r_{kj}$. Por ende, $f = \sum_{j=1}^{i_k} s_j f_{kj} \in \langle X \rangle$ es un polinomio de grado k en J que tiene a r como coeficiente director. Por ende, $g - f \in J$ y tiene grado, a lo sumo, $k-1$.

- Si $k > m$, y $r \in I_k = I_m$, entonces $r = \sum_{j=1}^{i_m} s_j r_{mj}$. Por lo tanto, $f = \sum_{j=1}^{i_m} s_j x^{k-m} f_{mj} \in \langle X \rangle$ es un polinomio de grado k en J que tiene a r como coeficiente director. Por ende, $g - f \in J$ y tiene grado, a lo sumo, $k - 1$.

En ambos caso, $g - f \in \langle X \rangle$. En consecuencia, $g \in \langle X \rangle$.

■

Corolario 3.2.2 *Sea K un cuerpo y A una K-álgebra finitamente generada. Entonces, A es un anillo noetheriano.*

3.3. El teorema de normalización de Noether

Observación 3.3.1 *Sea R un dominio integro y K un cuerpo tal que R es una extensión de K. Sea F el cuerpo de fracciones de R. Entonces, F/K es una extensión de cuerpos.*

Observación 3.3.2 *Sea R un dominio integro y F un cuerpo tal que F/R es una extensión. Entonces, $F/\mathbb{F}(R)$ es una extensión de cuerpos. En otras palabras, $\mathbb{F}(R)$ es el «menor» cuerpo que contiene a R.*

Corolario 3.3.1 *Sea S/R una extensión de anillos y $s_1, \ldots, s_n \in S$. Entonces, $\mathbb{F}(R[s_1, \ldots, s_n]) = R(s_1, \ldots, s_n)$.*

Teorema 3.3.1 (Lema de normalización de Noether) *Sea K un cuerpo y A un dominio integro que es una K-álgebra finitamente generada. Sea n el grado de trascendencia de $\mathbb{F}(A)$ sobre K. Entonces, existe un conjunto algebraicamente independiente $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq A$ tal que A es una extensión entera de $K[t_1, \ldots, t_n]$.*

Demostración. Tenemos que existen $u_1, \ldots, u_m \in A$ tales que $A \cong K[u_1, \ldots, u_m]$, además $\mathbb{F}(R) = K(u_1, \ldots, u_m)$. Si $u_1, \ldots, u_m$ son algebraicamente independientes, entonces $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base trascendente de $\mathbb{F}(A)$ sobre K. En otras palabras, $m = n$ y hemos terminado.

Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es algebraicamente dependiente, tenemos que $n \leq m - 1$ y

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in I} k_{i_1\ldots i_m} u_1^{i_1} \cdots u_m^{i_m} = 0$$

donde I es un conjunto finito de m-úplas de enteros no negativos y $k_{i_1,\ldots,i_m} \in K\backslash\{0\}$ para cada $(i_1, \ldots, i_m) \in I$.

Sea $c \in \mathbb{Z}$ tal que es mayor que cualquiera de las entradas de las m-úplas de I. Sean $(i_1, \dots, i_m), (j_1, \dots, j_m) \in I$, entonces

$$\begin{gathered} i_1 + ci_2 + \cdots + c^{m-1} i_m = j_1 + cj_2 + \cdots + c^{m-1} j_m \\ \Leftrightarrow \\ (i_1, \dots, i_m) = (j_1, \dots, j_m). \end{gathered}$$

Pues, $c \mid i_1 - j_1$, pero $c \geq i_1, j_1$, por ende $i_1 - j_2 = 0$. Lo que implica

$$\begin{aligned} ci_2 + \cdots + c^{m-1} i_m &= cj_2 + \cdots + c^{m-1} j_m \\ i_2 + \cdots + c^{m-2} i_m &= j_2 + \cdots + c^{m-2} j_m \end{aligned}$$

y se repite el argumento anterior sucesivamente. Por ende, ambas m-úplas son iguales. Por ende, el conjunto

$$\{i_1 + ci_2 + \cdots + c^{m-1} i_m \mid (i_1, \dots, i_m) \in I\}$$

tiene cardinalidad $|I|$. Además, tiene un elemento máximo, sea $(j_1, \dots, j_m) \in I$, la m-úpla asociada al elemento máximo de este conjunto. Sean

$$v_2 = u_2 - u_1^c, \ v_3 = u_3 - u_1^{c^2}, \dots, \ v_m = u_m - u_1^{c^{m-1}}.$$

Como $u_i = v_i + u^{c^{i-1}}$, para todo $2 \leq i \leq m$, podemos reescribir la primera igualdad como

$$k_{j_1 \cdots j_m} u^{j_1 + cj_2 + \cdots + c^{m-1} j_m} + f(u_1, v_2, \dots, v_m) = 0.$$

Por ende, u_1 es entero sobre $K[v_1, \dots, v_m]$, como $u_2, \dots, u_m$ claramente son enteros sobre $K[u_1, v_2, \dots, v_m]$, concluimos que R es una extensión entera de $K[u_1, v_2, \dots, v_m]$. Si $\{v_2, \dots, v_m\}$ es algebraicamente independiente, entonces $n = m - 1$ y hemos terminado. De no ser así, repetimos el argumento anterior con $K[v_2, \dots, v_m]$ en lugar de R. Podemos aplicar este argumento de forma sucesiva y un argumento inductivo prueba la existencia de un conjunto $\{z_{m-n+1}, \dots, z_m\} \subseteq R$ algebraicamente independiente tal que R es algebraico sobre $K[z_{m-n+1}, \dots, z_m]$. ■

3.4. Aplicaciones a la geometría algebraica

La *geometría algebraica* es la rama de las matemáticas que utiliza técnicas del álgebra abstracta, principalmente de la teoría de anillos conmutativos, para resolver problemas geométricos. Centrándose en los ceros de polinomios multivariables.

3.4.1. Variedades algebraicas

Definición 3.4.1 *Sea K un cuerpo, $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ y F una extensión algebraicamente cerrada. Definimos el conjunto*

$$V(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \forall f \in S\}.$$

Denominamos a $V(S)$ como la n-variedad afín en F^n de S.

Sea $V \subseteq F^n$, diremos que V es un ***conjunto algebraico*** *si existe $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $V = V(S)$.*

Notemos que el mapeo $S \mapsto V(S)$ define una función entre los subconjuntos de $K[x_1, \ldots, x_n]$ y los subconjuntos de F^n. Por otro lado, definimos el mapeo $Y \mapsto J(Y)$ dado por

$$J(Y) = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in Y\}.$$

Notemos que $J(Y)$ es un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Lema 3.4.1 *Sea K un cuerpo y F una extensión algebraicamente cerrada. Además, sean $S, T \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ y X, Y conjuntos algebraicos de F^n. Entonces*

- $V(K[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$;
- $J(\emptyset) = K[x_1, \ldots, x_n])$;
- *Si $S \subseteq T$, entonces $V(T) \subseteq V(S)$ y, si $X \subseteq Y$, entonces $J(Y) \subseteq J(X)$;*
- $V(S) = V(J(V(S)))$ *y* $J(Y) = J(V(J(Y)))$.

Omitiremos la demostración de este lema, pero puede verse en [4].

Observación 3.4.1 *Sea K un cuerpo, F una extensión algebraicamente cerrada de K y $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_k]$. Sea $I = \langle S \rangle$, entonces $V(S) = V(I)$.*

Observación 3.4.2 *Sea K un cuerpo, F una extensión algebraicamente cerrada de K y $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_k]$. Existen $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que*

$$V(S) = V(f_1, \ldots, f_n).$$

Demostración. Sea $I = \langle S \rangle$, el ideal generado por la familia S. Como $K[x_1, \ldots, x_k]$ es noetheriano, existen $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_k]$ tales que $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Es decir, para todo $f \in I$ existen $g_1, \ldots, g_m \in K[x_1, \ldots, x_k]$ tales que $f = \sum_{i=1}^{m} g_i f_i$. Por ende, si $f_i(a_1, \ldots, a_k) = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $f(a_1, \ldots, a_k) = 0$, para todo $f \in S$. En otras palabras, $V(S) = V(f_1, \ldots, f_m)$. ■

Por lo tanto, solo es necesario interesarnos por la variedades a ideales de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Sea $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal, claramente $V(I)$ es el conjunto de soluciones del «sistema de ecuaciones polinómicas» $\{f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \mid f \in S\}$. Nos podemos preguntar por la existencia de soluciones de tal sistema. Lo que es equivalente a preguntarnos si $V(I)$ es vacío o no y bajo qué condiciones. El lema de normalización de Noether será necesario para dar respuesta a esa pregunta.

Lema 3.4.2 *Sea K un cuerpo y F una extensión algebraicamente cerrada. Sea I un ideal propio de $K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $V(I)$ es no vacío.*

Demostración. Sabemos que todo ideal está contenido en algún ideal maximal, y que todo ideal maximal es primo. Es decir, si I es un ideal entonces existe P ideal primo tal que $I \subseteq P$. Por ende, $V(P) \subseteq V(I)$. En consecuencia, solo es necesario probarlo para ideales primos.

Sea $P \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal primo, notemos que $P \cap K = \{0\}$. Si existiera $a \in P \cap K$ entonces $1 = aa^{-1} \in P$, por ende $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ lo que es un absurdo.
Sea R el dominio integro $K[x_1, \ldots, x_n]/P$ y $\pi : K[x_1, \ldots, x_n] \to R$ el epimorfismo canónico. Notemos que $R = \pi(K)[\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)]$. Además, como $K \cap P = \{0\}$, $\pi(K) \cong K$. Por el lema de normalización de Noether existe $\{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq R$ algebraicamente independiente sobre $\pi(K)$ tal que R es una extensión entera de $S = \pi(K)[t_1, \ldots, t_m]$. Sea M el ideal de S generado por $\{t_1, \ldots, t_m\}$. Entonces, el mapeo $\pi(K) \to S/M$ dado por $\pi(a) \mapsto \pi(a) + M$ es un isomorfismo. Por ende, M es un ideal maximal de S. Por ende, existe N ideal maximal de R tal que $M = S \cap N$. Sea $\tau : R \to R/N$ el epimorfismo canónico. Entonces, R/N es un cuerpo. Por el segundo teorema de isomorfismo, estos mapas definen los isomorfismos

$$K \cong \pi(K) \cong S/M = S/(S \cap N) \cap (S + N)/N \cong \tau(S).$$

Sea $\overline{\tau(R)}$ la clausura algebraica de $\tau(R)$. Como R es entero sobre S, $\tau(R)$ es una extensión algebraica de $\tau(S)$, por ende $\overline{\tau(R)}$ es la clausura algebraica de $\tau(S)$. Como F contiene a $\overline{K}$ (la clausura algebraica de K) y tenemos el isomorfismo $K \cong \tau(S)$, podemos extenderlo a un isomorfismo $\overline{K} \cong \overline{\tau(R)}$. Sea $\sigma : \overline{\tau(R)} \to \overline{K} \subseteq$

F tal isomorfismo. Definimos ϕ como la composición

$$K[x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{\pi} R \xrightarrow{\tau} \tau(R) \xrightarrow{\sigma} F.$$

Notemos que $\phi|_K = 1_K$ y $\phi|_P = 0$. Por ende, para cada $f(x_1, \ldots, x_n) \in P$, $f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) = 0$. Es decir, $(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) \in V(P)$. ■

Teorema 3.4.3 (El Nullstelensatz de Hilbert) *Sea K un cuerpo y F una extensión algebraicamente cerrada. Sea I un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ y $V(I)$ su variedad algebraica afín. Entonces,*

$$J(V(I)) = \mathrm{Rad}(I).$$

La demostración requiere del lema anterior y puede verse en [4].

3.5. El teorema de descomposición de Lasker-Noether

A modo de introducción, recordemos el teorema fundamental de la aritmética. Tal teorema nos afirma que todo número natural mayor que 1 se puede expresar de forma única como un producto de potencias de primos. Los números primos son los ladrillos de los números enteros. Esto lo podemos pensar a nivel de *ideales* como que

$$n\mathbb{Z} = \langle p_1^{n_1} \rangle \cdots \langle p_r^{n_r} \rangle = \langle p_1^{n_1} \rangle \cap \cdots \cap \langle p_r^{n_r} \rangle,$$

donde $n = \prod_{i=1}^r p_i^{n_i}$. Queremos ver como propiedad sobre la estructura de los números enteros se puede generalizar para otros anillos. Es decir, ver cuando existen ideales «ladrillo» tal que todo ideal propio se pueda expresar como intersección finita de estos.

Definición 3.5.1 *Sea R un anillo conmutativo y $Q \subseteq R$ un ideal. Diremos que Q es **primario** si, para todo $a, b \in R$, cumple que*

$$ab \in Q \text{ y } a \notin Q \Rightarrow b^n \in Q, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 3.5.1 *Sea R un anillo conmutativo y Q un ideal de R. Si Q es un ideal primario, entonces* $\mathrm{Rad}\, Q$ *es un ideal primo.*

Demostración. Sean $a, b \in R$ tales que $ab \in \mathrm{Rad}(Q)$ y $a \notin \mathrm{Rad}(Q)$. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $(ab)^n \in Q$. Como $a^n \notin Q$, tenemos que $(b^n)^m \in Q$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Por ende, $b \in \mathrm{Rad}(Q)$. ■

Este resultado nos impulsa a utilizar la siguiente terminología. Sea Q un ideal primario y P un ideal primo. Diremos que Q es P-primario si

- $Q \subseteq P \subseteq \mathrm{Rad}(Q)$;
- Si $ab \in Q$ y $a \notin Q$, entonces $b \in P$.

Proposición 3.5.2 *Si $Q_1, \ldots, Q_n$ son ideales primarios tales que todos son P-primarios, para un ideal primo P, entonces $\bigcap_{i=1}^n Q_i$ es un ideal P-primario.*

Demostración. Sea $Q := \bigcap_{j=1}^n Q_j$, y verifiquemos que $\mathrm{Rad}(Q) = P$. Sabemos que $Q_i \subseteq P$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $Q \subseteq P$, por ende $\mathrm{Rad}(Q) \subseteq \mathrm{Rad}(P) = P$.

Para demostrar la inclusión inversa, tomemos un ideal primo P' que contenga a Q. Como $Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \subseteq Q \subseteq P'$, se sigue que $Q_i \subseteq P'$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, $P = \mathrm{Rad}(Q_i) \subseteq P'$. Como consecuencia, $P \subseteq \mathrm{Rad}(Q)$. Por lo tanto, $\mathrm{Rad}(Q) = P$.

Procedemos ahora a demostrar que Q es un ideal primario. Para ello, tomemos $r, s \in R$ tales que $rs \in Q$ y $r \notin Q$. Entonces, $r \notin Q_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como $rs \in Q \subseteq Q_j$ y Q_j es un ideal primario, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $s^n \in Q_j$. Esto implica que $s \in \mathrm{Rad}(Q_j) = P = \mathrm{Rad}(Q)$, y por lo tanto $s^m \in Q$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Así, el ideal Q es primario. ■

Definición 3.5.2 *Sea R un anillo conmutativo e I un ideal de R. Diremos que I admite una **descomposición primaria** si existen ideales primarios $Q_1, \ldots, Q_n$ de R tales que $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$. Si Q_i no está contenido en $\bigcap_{j \neq i}^n Q_i$ y tales ideales son primarios son distintos dos a dos, diremos que la descomposición es **irredundante**.*

Proposición 3.5.3 *Sea R una anillo conmutativo e I un ideal. Si I admite una descomposición primaria, entonces admite una descomposición primaria irredundante.*

Definición 3.5.3 *Sea R un anillo conmutativo y sean I y J ideales. Definimos*

$$(I : J) = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}.$$

Observación 3.5.1 *El conjunto $(I : J)$ es un ideal. Lo llamaremos **cociente de ideales**.*

Definición 3.5.4 *Sea R un anillo conmutativo, diremos que un ideal I es **irreducible** si no se puede expresar como intersección de dos ideales que lo contengan estrictamente.*

Definición 3.5.5 *Sea R un anillo conmutativo. Diremos que R es un **anillo de Lasker** si todo ideal admite una descomposición primaria.*

Teorema 3.5.1 (Teorema de descomposición de Lasker-Noether) *Todo anillo noetheriano es un anillo de Lasker.*

Proposición 3.5.4 *Sea R un anillo noetheriano, entonces todo ideal se expresa como intersección finita de ideales irreducibles.*

Demostración. Sea S el conjunto de ideales propios de A que no se pueden expresar como intersección finita de ideales irreducibles. Supongamos que S es no vacía, entonces S tienes un elemento maximal I. Como $I \in S$, I no puede ser irreducible, entonces $I = J \cap K$, donde J, K son ideales de A que contienen estrictamente a I. Notemos que si $J \in S$, contradecimos la maximalidad de I. Por ende, $J \notin S$ y, por un argumento análogo, $K \notin S$. Es decir, J y K admiten una expresión como intersección finita de ideales irreducibles. Lo que implica que $I \notin S$. Lo que es un absurdo. ■

Con esto probamos que todo ideal de un anillo de Noether es la intersección de una cantidad finita de ideales irreducibles. Hay que ver como se relacionan los ideales irreducibles con los ideales primarios.

Proposición 3.5.5 *En un anillo noetheriano, todo ideal irreducible es primario.*

Demostración. Sea R un anillo noetheriano, y sea Q un ideal irreducible de R. Tomemos $a, b \in R$ tales que $ab \in Q$ pero $b \notin Q$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el ideal cociente

$$A_n := (Q : (a^n)) = \{r \in R : ra^n \in Q\}.$$

Se puede ver fácilmente que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena ascendente de ideales. Como R es noetheriano, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_m = A_n$ para todo $m \geq n$. Consideremos ahora los ideales $I := (a^n)+Q$ y $J := (b)+Q$. Es claro que $Q \subseteq I \cap J$. Para demostrar la inclusión inversa, sea $y \in I \cap J$, y escribamos $y = ra^n + q$ para ciertos $r \in R$ y $q \in Q$. Como $aJ \subseteq Q$, se sigue que $ay \in Q$. Entonces,

$$ra^{n+1} = ay - aq \in Q.$$

Esto implica que $r \in A_{n+1} = A_n$, y por tanto $ra^n + q \in Q$. Así, $y \in Q$. Por lo tanto, $Q = I \cap J$. Como Q es irreducible, se sigue que $Q = I$ o $Q = J$.

Ahora bien, el hecho de que $b \notin Q$ garantiza que $Q = I$, y por tanto $a^n \in Q$. Concluimos que Q es un ideal primario. ■

Se puede consultar una extensión de los conceptos y teoremas de esta sección a las estructuras de módulos en [4] y profundizar un poco más en los anillos de Lasker en [9].

A modo de curiosidad histórica, Emanuel Lasker no solo fue un matemático, sino que fue un ajedrecista profesional. Siendo el segundo campeón del mundo cronológicamente y la persona que mantuvo su corona por más tiempo (27 años), lo que lo vuelve uno de los mejores jugadores de la historia. También fue un escritor filosófico y coautor de un drama, pero sus obras recibieron poca atención. Respecto al teorema, Lasker lo enunció y demostró para anillos de polinomios y anillos de series de potencias formales en 1905 y Noether demostró el caso general en 1921.

Capítulo 4

El teorema más bello de la física

El teorema de Noether es uno de los más revolucionarios de la física moderna, pero no muchos conocen su historia. Era el año 1915, Einstein había formulado su teoría general de la relatividad, cambiando por completo la percepción del espacio, el tiempo y la gravedad. Esta teoría se basaba en principios de la geometría diferencial y variación que más adelante explayaremos. Si bien Einstein había conseguido las ecuaciones de campo, ni él ni otros grandes matemáticos como Hilbert y Klein lograban comprender cómo se aplicaban las leyes de conservación en este nuevo marco, pues en la relatividad general, el concepto de energía no era tan claro, y en ciertos contextos parecía no conservarse, lo cual suponía un gran problema conceptual y matemático. Hilbert y Klein no podían solos, pues necesitaban de la ayuda de un experto en teoría de invariancia, y Noether, ya se había consagrado como tal. En 1918, ella publicó su resultado en un artículo titulado: *Invariante Variationsprobleme* (problemas variacionales invariantes), donde demostró que las leyes de conservación son consecuencias matemáticas directas de las simetrías del lagrangiano, contrariando la creencia de que eran principios independientes o empíricos. El teorema de Noether resultó tan transformador y significativo, que sentó las bases conceptuales y matemáticas para casi toda la física del siglo XX y XXI. Revolucionar el entendimiento sobre las leyes de conservación no fue lo único: pues la base conceptual del Modelo Estándar. .

4.1. Preliminares

A continuación haremos un breve recorrido por las nociones previas necesarias para presentar el teorema de Noether.

4.1.1. Nociones de simetría

En el formalismo lagrangiano, una *simetría* se define como una transformación diferenciable del espacio de configuraciones (y eventualmente del tiempo) que deja invariante la acción funcional del sistema. Sea un sistema dinámico descrito por un lagrangiano

$$L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

donde $q_i \in Q$ son coordenadas generalizadas sobre una variedad de configuración Q, y $\dot{q}_i = dq_i/dt$. Consideramos una transformación infinitesimal del tipo

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto q_i + \epsilon\, \xi_i(q, \dot{q}, t), \\ t &\mapsto t + \epsilon\, \tau(q, \dot{q}, t), \end{aligned}$$

parametrizada por $\epsilon \in \mathbb{R}$ pequeño.

Definición 4.1.1 *Se dice que una transformación infinitesimal como la anterior es una* simetría del lagrangiano *si la variación inducida sobre L puede escribirse como una derivada total:*

$$\delta L = \epsilon\, \frac{dF}{dt},$$

para alguna función diferenciable $F(q, \dot{q}, t)$. En tal caso, la acción

$$\mathcal{S}[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$$

es invariante bajo la transformación, en el sentido variacional.

Bajo esta condición, la variación total de la acción es un término de frontera:

$$\delta\mathcal{S} = \epsilon\, [F]_{t_1}^{t_2},$$

y no afecta las ecuaciones de Euler–Lagrange derivadas del principio de mínima acción.

4.1.2. Cálculo variacional y ecuaciones de Euler-Lagrange

El formalismo lagrangiano en mecánica clásica y teoría de campos se basa en la formulación variacional del principio de evolución del sistema. A continuación se definen los objetos fundamentales del cálculo variacional que dan lugar a las ecuaciones de movimiento.

Funcional de acción

Definición 4.1.2 *Sea Q una variedad de configuración de dimensión finita. Una* curva admisible *es una función $q : [t_1, t_2] \to Q$, de clase C^2, tal que $q(t_1) = q_1$ y $q(t_2) = q_2$, donde los extremos $q_1, q_2 \in Q$ están fijados. El* funcional acción *asociado a un lagrangiano $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con TQ el fibrado tangente de Q, está dado por*

$$\mathcal{S}[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt.$$

Condiciones de contorno y curvas admisibles

Teorema 4.1.1 *Si el funcional $\mathcal{S}[q]$ es estacionario respecto de variaciones de primer orden en una curva admisible $q(t)$, entonces $q(t)$ satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \textit{para cada } i = 1, \ldots, n$$

Principio de mínima acción

La evolución real del sistema corresponde a aquellas curvas admisibles $q(t)$ que hacen estacionario el funcional $\mathcal{S}[q]$ frente a variaciones arbitrarias $\delta q(t)$ que se anulan en los extremos, es decir,

$$\delta \mathcal{S}[q] = 0 \quad \text{para toda } \delta q(t) \text{ tal que } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

Deducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange

Teorema 4.1.2 *Sea*

$$L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

un lagrangiano suficientemente regular, y sea

$$\mathcal{S}[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\, dt$$

el funcional de acción definido sobre el espacio de curvas

$$q : [t_1, t_2] \to Q$$

de clase C^2, con extremos fijos. Si $q(t)$ anula la primera variación de $\mathcal{S}$ frente a toda variación diferenciable que se anule en los extremos, entonces $q(t)$ satisface las ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \textit{para todo } i.$$

Demostración. Sea

$$\eta : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$$

una función de clase C^2 con condiciones de frontera

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$$

Consideramos una familia de curvas variacionales

$$q^\epsilon(t) = q(t) + \epsilon\, \eta(t),$$

con $\epsilon \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\mathcal{S}[\epsilon] := \mathcal{S}[q^\epsilon] = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q^\epsilon(t), \dot{q}^\epsilon(t), t\big)\, dt$$

La condición de estacionariedad es

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{S}[\epsilon]\right|_{\epsilon=0} = 0.$$

Calculamos:

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{S}[\epsilon] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i^\epsilon}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i^\epsilon}{d\epsilon}\right] dt.$$

Dado que

$$\frac{dq_i^\epsilon}{d\epsilon} = \eta_i(t), \qquad \frac{d\dot{q}_i^\epsilon}{d\epsilon} = \dot{\eta}_i(t),$$

al evaluar en $\epsilon = 0$, se obtiene

$$\delta\mathcal{S} = \left.\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{S}[\epsilon]\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\eta}_i\right) dt.$$

Integramos por partes el segundo término:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\eta}_i\, dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\eta_i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\eta_i\, dt$$

Como $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, el término de frontera se anula y queda

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\eta_i\, dt$$

Por el lema fundamental del cálculo de variaciones, como $\eta_i(t)$ es arbitraria, se concluye

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \quad \text{para todo } i.$$

■

4.1.3. Definición y rol del lagrangiano y la acción

Definición del lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

Definición 4.1.3 *Sea Q una variedad diferenciable (el espacio de configuraciones del sistema) y TQ su fibrado tangente. Un* lagrangiano *es una función suficientemente regular*

$$L\colon TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

que asigna un valor real a cada estado del sistema dado por las coordenadas generalizadas q^i, sus derivadas temporales $\dot{q}^i$ (las velocidades generalizadas) y el tiempo t.

Típicamente, en mecánica clásica, el lagrangiano se define como la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V del sistema:

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = T(q^i, \dot{q}^i) - V(q^i, t).$$

El funcional de acción $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$

Definición 4.1.4 *Dada una curva $q\colon [t_1, t_2] \to Q$ de clase C^2 que describe una trayectoria del sistema entre los instantes t_1 y t_2, se define el* funcional de acción *como*

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\, dt.$$

El principio de mínima acción (o más precisamente, principio de Hamilton) establece que las trayectorias físicas reales del sistema son aquellas que hacen estacionario el funcional de acción frente a todas las variaciones diferenciables de la curva $q(t)$ que mantienen fijos los extremos. Esta condición de estacionariedad conduce, como se ha demostrado previamente, a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

4.1.4. Simetrías del lagrangiano e invariancia

Simetrías continuas y grupos de Lie

Definición 4.1.5 *Una* familia uniparamétrica de transformaciones *del espacio de configuraciones se define como una aplicación diferenciable*

$$\Phi_\epsilon\colon Q \to Q, \quad q^i \mapsto q^i_\epsilon = \Phi^i(q, \epsilon)$$

tal que Φ_0 es la identidad. Decimos que esta transformación es una simetría del sistema *si induce una transformación sobre el espacio de trayectorias que deja invariante el funcional de acción. Estas transformaciones forman un grupo local continuo.*

Definición 4.1.6 *Sea M un espacio topológico localmente euclídeo*[1]*. Un* ***atlas*** $\mathcal{F}$ *de diferenciable, en M es una familia de sistemas coordenados $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ que satisfacen:*

1. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$.
2. *Para cada $\alpha, \beta \in I$ tales que $U_\alpha \cap U_\beta$ es no vacío tenemos que*

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n \to \varphi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$$

   es diferenciable.

Si el atlas $\mathcal{F}$ es maximal en el conjunto de atlas diferenciable en M ordenados por la contención, entonces lo llamaremos ***estructura diferenciable*** *en M.*

Definición 4.1.7 *Una variedad diferenciable de dimensión n es un par $(M, \mathcal{F})$ donde M es una variedad topológica de dimensión n y $\mathcal{F}$ una estructura diferenciable en M.*

Definición 4.1.8 *Un* grupo de Lie *es una variedad diferenciable G dotada de una estructura de grupo tal que las operaciones de multiplicación $G \times G \to G$ y de inversión $G \to G$ son aplicaciones diferenciables.*

Los grupos de Lie permiten describir simetrías continuas mediante estructuras suaves. Su estudio se basa en los generadores infinitesimales y las correspondientes álgebras de Lie.

Definición 4.1.9 *El* generador infinitesimal *asociado a una familia uniparamétrica Φ_ϵ es el campo vectorial definido por*

$$X(q) := \frac{d}{d\epsilon} \Phi_\epsilon(q) \bigg|_{\epsilon=0}$$

Este campo genera una acción infinitesimal sobre el espacio de configuraciones, y satisface las relaciones de conmutación propias de una álgebra de Lie.

Definición 4.1.10 *Sea G un grupo de Lie. Su* álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *está compuesta por los vectores tangentes en la identidad a las curvas del grupo. Equipado con el corchete de Lie $[X, Y]$, $\mathfrak{g}$ codifica la estructura infinitesimal del grupo.*

[1]Para profundizar en estos conceptos consultar [11].

Invariancia del lagrangiano y de la acción

Una vez identificadas las simetrías continuas del espacio de configuraciones, se investiga cómo estas afectan al lagrangiano y, en consecuencia, al funcional de acción.

Definición 4.1.11 *Dada una transformación infinitesimal parametrizada por $\epsilon \in \mathbb{R}$:*

$$q^i \mapsto q^i_\epsilon = q^i + \epsilon\, \xi^i(q, \dot{q}, t),$$

se dice que el lagrangiano es invariante *bajo esta transformación si su variación primera se anula:*

$$\delta L = \frac{d}{d\epsilon} L(q^i_\epsilon, \dot{q}^i_\epsilon, t)\bigg|_{\epsilon=0} = 0$$

[2].

Definición 4.1.12 *Decimos que el lagrangiano es* invariante hasta derivada total *si bajo la transformación infinitesimal se tiene:*

$$L' = L + \frac{dF}{dt},$$

para alguna función diferenciable $F(q, t)$. En tal caso, el funcional de acción

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

permanece invariante siempre que F se anule o permanezca constante en los extremos (i.e., cuando las condiciones de contorno son fijas).

Teorema 4.1.3 (Invariancia de la acción) *Si una transformación infinitesimal del espacio de configuraciones deja el lagrangiano invariante hasta derivada total, entonces la acción $S[q]$ permanece invariante bajo dicha transformación. Es decir:*

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\, dt = F(t_2) - F(t_1)$$

Por tanto, $\delta S = 0$ si $F(t_1) = F(t_2)$ o si las condiciones de contorno fijan $q(t_1)$ y $q(t_2)$.

Este resultado permite generalizar la noción de simetría a aquellas transformaciones que no necesariamente dejan el lagrangiano invariante punto a punto, sino que preservan el valor de la acción. Estas simetrías son precisamente las que están contempladas por el teorema de Noether.

[2]Esta condición es demasiado restrictiva, y en muchos casos, el lagrangiano cambia bajo la acción de una simetría, pero solo mediante la adición de una derivada total

4.1.5. Cantidad conservada

El concepto de cantidad conservada está íntimamente ligado a la existencia de simetrías del sistema. Las simetrías continuas que dejan invariante la acción, conducen a leyes de conservación mediante el teorema de Noether.

Definición 4.1.13 *Una* cantidad conservada *(o* integral de movimiento*) es una función diferenciable $Q(q^i, \dot{q}^i, t)$ tal que su derivada total respecto del tiempo se anula a lo largo de las trayectorias que satisfacen las ecuaciones de Euler–Lagrange:*

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

Este resultado implica que Q permanece constante en el tiempo durante la evolución del sistema: representa una ley de conservación.
Por ejemplo, si el lagrangiano es invariante bajo traslaciones espaciales, se conserva el momento lineal asociado.

4.2. Primer teorema de Noether

Teorema 4.2.1 *Sea $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ un lagrangiano definido sobre el fibrado tangente $TQ \times \mathbb{R}$, con $q_i \in Q$ coordenadas generalizadas de un sistema de n grados de libertad. Consideremos una transformación infinitesimal del tipo:*

$$t \mapsto t + \epsilon\tau(q, \dot{q}, t), \qquad q_i \mapsto q_i + \epsilon\xi_i(q, \dot{q}, t),$$

con $\epsilon \in \mathbb{R}$ parámetro infinitesimal. Suponemos que la variación inducida en el lagrangiano es:

$$\delta L = \frac{dF}{dt}$$

para alguna función $F(q, \dot{q}, t)$. Entonces, la cantidad:

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\xi_i - L\tau + F$$

es conservada a lo largo de cualquier trayectoria que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange, es decir,

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad si \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

4.2.1. Demostración

Demostración. La variación del lagrangiano bajo la transformación infinitesimal es:

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tau,$$

donde:

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d\xi_i}{dt} - \dot{q}_i \frac{d\tau}{dt}.$$

Sustituyendo:

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\xi_i}{dt} - \dot{q}_i \frac{d\tau}{dt} \right) \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tau.$$

Agrupando términos:

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\xi_i}{dt} \right) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{d\tau}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \tau.$$

Ahora, consideremos la derivada temporal de la cantidad Q:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i \right) - \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \xi_i \right) - \frac{dL}{dt}\tau - L\frac{d\tau}{dt} + \frac{dF}{dt}.$$

Reordenando y usando las ecuaciones de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

se obtiene:

$$\frac{dQ}{dt} = \delta L - \frac{dF}{dt}.$$

Pero como por hipótesis $\delta L = \frac{dF}{dt}$, concluimos que:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.$$

[3] Por lo tanto, Q es constante a lo largo de las soluciones del sistema. ■

[3]La condición $\delta L = \frac{dF}{dt}$ indica que la transformación infinitesimal no deja estrictamente invariante al lagrangiano, sino que su variación es una derivada total. Esto implica que la acción $S = \int L\, dt$ cambia solo en una constante, ya que la integral de una derivada total es una función evaluada en los extremos del intervalo, lo que no afecta las ecuaciones de movimiento. Esta invariancia débil es suficiente para que el sistema conserve una cantidad asociada.

4.3. El (segundo) teorema más bello de la física

El segundo teorema de Noether. Sí, hay un segundo teorema, uno mucho menos conocido pero no por eso menos importante. Aunque no nos detendremos en un desarrollo exhaustivo, consideramos pertinente incluir una breve introducción a este teorema, ya que omitirlo por completo resultaría inapropiado dado su alcance teórico y su relevancia en el marco general de las simetrías.

Teorema 4.3.1 *Sea un funcional de acción*

$$S[\phi] = \int L\big(x, \phi^{(k)}(x)\big)\, d^n x,$$

donde $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ *son campos dependientes de las variables independientes* $x = (x_1, \ldots, x_n)$*, y* $\phi^{(k)}$ *denota todas las derivadas parciales de orden hasta* k*.*

Si el funcional de acción es invariante bajo un grupo infinito de transformaciones locales dependientes de funciones arbitrarias $g_r(x)$ *y sus derivadas hasta cierto orden, entonces existen operadores diferenciales lineales* D_r^α *tales que las ecuaciones de Euler–Lagrange* $E_\alpha(L) = 0$ *satisfacen identidades diferenciales del tipo*

$$\sum_{\alpha=1}^{m} D_r^\alpha\big(E_\alpha(L)\big) \equiv 0, \quad r = 1, \ldots, R,$$

es decir, las ecuaciones de movimiento no son independientes sino que están relacionadas por R *identidades diferenciales. Estas relaciones constituyen las* identidades de Noether*.*

Para ver la demostración, consultar la bibliografía. [10]

Capítulo 5

Últimos años

5.1. El exilio

Eran los comienzos de la década del treinta. Emmy había obtenido un gran reconocimiento en el Congreso Internacional de Matemáticas tras su discurso, y estaba de vacaciones en los montes alpinos al sur de Zúrich, tomándose unas jornadas libres antes de su regreso a Gotinga para el comienzo de semestre. Parecía que al fin había logrado establecerse en esa meseta de estabilidad que tanto merecía, pero el convulso clima político que se gestaba en Alemania le depararía otra suerte mucho menos favorable. En julio de 1932, el partido nacional-socialista, con 14 millones de votos y 230 escaños en el Parlamento, se proclamó la fuerza vencedora. El contexto de hiperinflación, desempleo y violencia que experimentó Alemania desde su derrota en la Primera Guerra Mundial, radicalizó a los ciudadanos, que depositaron su voto en quienes supieron capitalizar su exasperación y descontento, los nazis. Las consecuencias no se hicieron esperar: Emmy fue una de las primeras en ser suspendida indefinidamente de su actividad docente, no sólo por ser judía, sino también por las ideas socialistas que profesaba. Fue una de los tantos docentes víctimas de las órdenes del Ministerio de Ciencias, Educación y Cultura del Reich, que, desde el ascenso del nazismo, y especialmente tras la promulgación de la Ley Habilitante de 1933, inició una purga sistemática del ámbito académico. Dentro de las destacables figuras que protagonizaron la escandalosa fuga de cerebros hacia Estados Unidos se encontraban dieciséis premios Nobel, y matemáticos de la talla de Max Born y Richard Courant. Gotinga fue una de las universidades más afectadas por las políticas antisemitas, y Hilbert, que si bien realizaba visitas asiduas a Estados Unidos, jamás dejó de desem-

peñarse en Alemania, tuvo que presenciar cómo se transformaba en una institución cada vez más estéril y de nula actividad matemática. Si bien Estados Unidos no fue el único país que con urgencia acogió a refugiados académicos, fue el que más se benefició de las aportaciones de los científicos y el que mejores oportunidades les brindó. Por otra parte, Hermann Weyl, que asumió la dirección del Instituto de Mátematicas de Gotinga ante la destitución de Courant, hizo todo lo posible para que Emmy se exiliara en Estados Unidos. También consideró desplazarse a Moscú, donde Pavel Alexándroff, intentó, sin éxito, conseguirle una posición en la Universidad Estatal. Emmy terminó consiguiendo una beca de la Fundación Rockefeller para desempeñarse en el Bryn Mawr College, que si bien no era una universidad a la altura de Princeton u Oxford, en un contexto donde la violencia y el antisemitismo se agravaban rápidamente, fue su mejor opción. Finalmente, en octubre de 1933, Emmy partió hacia América para emprender una nueva vida como profesora en el Bryn Mawr.

5.2. Bryn Mawr y las chicas Noether

Bryn Mawr es una pequeña localidad de Pensilvania, a escasos kilómetros de Filadelfia. El Bryn Mawr College es parte de las "siete escuelas hermanas", una agrupación de las siete primeras facultades estadounidenses creadas únicamente para mujeres entre 1837 y 1889. Académicamente el Bryn Mawr es un *Liberal Artes College*, es decir, una institución que ofrece carreras de cuatro años, orientadas a estudios liberales, tales como la literatura, filosofía y ciencias, con planes pensados para facilitar la inserción de la mujer en el mundo laboral. Para cuando Emmy llegó, La ciudad apenas superaba los tres mil habitantes. Era una comunidad tranquila, reservada, habitada por familias acomodadas. Pero, pese a su tamaño, Bryn Mawr no albergaba una, sino dos instituciones superiores: el Harcum College y el propio Bryn Mawr College. Emmy, recién exiliada de una Europa convulsa, fue recibida con calidez y afecto por Marion Edwards Park, la rectora de la universidad, una mujer comprometida con la inclusión e inserción de los académicos desplazados por el nazismo. Aquel recibimiento, generoso y genuino, resultó de vital importancia para Emmy, que sufría de la lejanía de su hermano y de su país natal. En el Departamento de Matemáticas, dirigido por Anna Johnson, Emmy encontró más que una colega: una amiga entrañable. Anna, que había estudiado en Gotinga gracias a una beca de doctorado, compartía con ella el amor por la disciplina y los recuerdos de Alema-

nia. Aunque el departamento apenas contaba con cinco profesores, y Emmy ya no tenía cerca a sus antiguos colaboradores, la amistad con Anna hizo de su estadía en la nueva universidad, una experiencia mucho más agradable. La rectora Park, consciente del talento excepcional de Emmy, hizo todo lo posible para crearle un entorno de trabajo propicio. Incluso promovió una beca especial, la *Emmy Noether Fellowship*, destinada a ofrecer a jóvenes brillantes la oportunidad de trabajar con ella. Así, lentamente, Emmy fue construyendo un pequeño círculo de investigación. Al principio eran seis: tres profesores y tres estudiantes, todas ellas talentosas matemáticas. El grupo se amplió con la llegada de jóvenes estudiantes, profesoras e investigadoras recién doctoradas.
Sin embargo, el Bryn Mawr no tenía una estructura sólida de investigación. La Rockefeller Foundation, que financiaba la beca de Emmy, intentó trasladarla a una institución más acorde a su perfil investigador. Fue así como Emmy comenzó a recibir invitaciones para dictar conferencias magistrales en el flamante Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, un centro de investigación posdoctoral y un santuario del pensamiento libre, donde se habían refugiado otros exiliados ilustres: Albert Einstein, Hermann Weyl, John von Neumann y Kurt Gödel, sólo por mencionar algunos. Desde febrero de 1934, sus lecciones atrajeron a estudiantes y colegas por igual. Emmy quedó sorprendida por el gran nivel matemático que el centro había adquirido en tan poco tiempo. Se sentía, al fin, parte de algo nuevo y promisorio. En el verano de ese mismo año, emprendió el que sería su último viaje a Alemania. Visitó fugazmente a su hermano Fritz y a sus sobrinos. También se deshizo de su pequeña casa: intuía que su futuro no estaba en Europa, pues si bien sólo le restaba un año de beca en el Bryn Mawr College, sabía que sus amistades de Princeton y Hermann Weyl harían todo lo posible para prolongar su estancia en Estados Unidos. En Hamburgo, pasó unos días con Emil Artin y su familia, y finalmente, volvió a Gotinga. Aquella ciudad, otrora centro neurálgico de la matemática mundial, estaba desmantelada, empobrecida, irreconocible. Ver tan reducida a la facultad que antaño dio lugar a los más brillantes matemáticos de su siglo, la afectó profundamente. No fueron pocos los que notaron su profundo cambio de humor de regreso a Estados Unidos. Y no es por menos, pues su retorno implicaba despedirse por siempre de la poca familia que le quedaba. Aún así, retomó su rutina con la misma pasión de siempre. Las conversaciones con Anna, las discusiones matemáticas con sus alumnas, las ideas que surgían una tras otra en charlas que a veces se extendían hasta entrada la noche. Sus conferencias en Princeton comenzaban a

atraer a más estudiantes, jóvenes brillantes que habrían ampliado su grupo de trabajo, de no ser por una repentina complicación médica que acabaría con esta historia de forma tanto precipitada como lamentable. Emmy fue ingresada en el hospital de Bryn Mawr el 8 de abril de 1935, para ser intervenida por un quiste ovárico. Con el humor y la resiliencia que le eran tan característicos, desestimó la importancia de la cirugía, tratándola de un incidente menor. Incluso le escribió una larga carta a Helmut Hasse, en la que lejos de hablar sobre hospitales y operaciones, discutía problemas matemáticos y le preguntaba sobre sus planes para el verano. La operación transcurrió sin incidentes. Dos días después, parecía haberse recuperado con normalidad y recibía varias visitas. Nadie aguardaba tan trágico desenlace: de repente, Emmy entró en coma. Su temperatura subió con violencia. Una infección posoperatoria, fulminante, se la llevó el 14 de abril de 1935, con tan solo cincuenta y tres años de edad.

Su deceso generó una gran conmoción, pues Emmy no había informado de su intervención a casi ninguno de sus allegados, incluyendo a su hermano y sus colegas alemanes, que se enteraron por medio de un telegrama. A su fallecimiento le siguieron homenajes sinceros, emotivos, escritos desde el dolor y admiración, por parte de los más grandes matemáticos que habían tenido la oportunidad de trabajar a su lado. Hermann Weyl, escribió un largo elogio, con un respeto casi reverente. Albert Einstein la congratuló con una conmovedora nota en el *New York Times*. Ambos honraron su memoria, dando cuenta de lo magnos y revolucionarios que fueron sus aportes. Pero más allá de los elogios técnicos, todos coincidían en lo esencial: su bondad, entusiasmo, valentía y generosidad inquebrantables. Emmy Noether fue una mujer brillante, inspiradora y profundamente humana, que dedicó con una tenacidad implacable su vida entera al estudio y enseñanza de lo que más le apasionaba, las matemáticas.

5.3. Legado

El legado de Emmy Noether es uno de los más profundos e influyentes en la historia de las matemáticas y la física. No solo aportó a ambas disciplinas, sino que transformó las matemáticas en su núcleo estructural y brindó a la física una de sus herramientas teóricas más potentes. Su célebre teorema, producto de sus trabajos en álgebra abstracta, se convirtió en una piedra angular de la física teórica; y no sólo proporcionó una base conceptual para las leyes de conservación de la mecánica clásica, sino

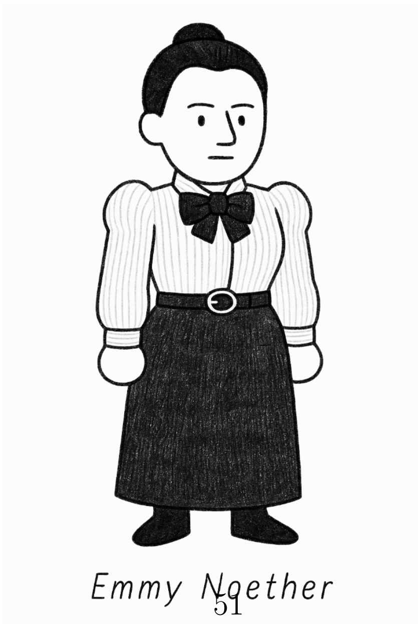
que hoy resulta imprescindible en áreas como la teoría cuántica de campos, relatividad general, física de partículas y las teorías de Gauge. Por otra parte, en matemática, su influencia se extiende a campos como la geometría diferencial, la topología algebraica, la formulación moderna de sistemas dinámicos, y la teoría de grupos de Lie, sólo por mencionar algunos. Podríamos decir que tanto el primer como el segundo teorema de Noether son una de las bases conceptuales más importantes del Modelo Estándar de la física de partículas, ya que permiten vincular las simetrías locales (de gauge) con las leyes de conservación y con la dinámica de las interacciones fundamentales.

Alcanzó todos estos logros a pesar de la hostilidad del ambiente académico de su tiempo. Y, en la actualidad, se la considera una de las madres fundadoras del álgebra moderna y un vínculo esencial entre las matemáticas y la física teórica. En otras palabras, una de las mentes matemáticas más brillantes de todos los tiempos.

Capítulo 6

Conclusión

He aquí la culminación de esta monografía. Más allá del disfrute intrínseco al proceso de redacción y de la alegría aparejada a apreciar el resultado final, es inevitable no sentirnos aquejados por cierta inquietud, inquietud que aflora al dar término a un trabajo que con tanto empeño y cariño desarrollamos. Es nuestra primordial motivación compartir y divulgar acerca de esta eminencia de la física y de la matemática; mujer que injustamente, a día de hoy, sigue sin recibir por completo el reconocimiento que por sus revolucionarios aportes se merece. Creemos que la difusión sobre estas admirables figuras es imprescindible, no sólo para revalorizar y remarcar sus trabajos antaño desmeritados, sino también a efectos de motivar a los niños y niñas y a los estudiantes de todos los niveles, que a través de estas inspiradoras historias, son alentados a seguir el hermoso, complejo y fascinante camino de la ciencia .



Bibliografía

[1] Emmy Noether. *Invariante Variationsprobleme, Nachr.* Köning. Gesell. Wissen. Göttingen, Matj.-Phys. Kl. (1918) 235-257.

[2] P.J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* 2da edición. Graduate texts in mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993.

[3] Y. Kosmann-Schwarzbach. *The Noether Theorems. Invariance and Conservation Laws in the twentieth century.* Springer, New York, 2011.

[4] Thomas W. Hungerford. *Algebra.* Springer-Verlag, New York, Inc. 1974.

[5] Deborah Radford. *On Emmy Noether and Her Algebraic Works*

[6] Mina Teicher. *The Heritage of Emmy Noether.* Israel Mathematical conference proceedings. B.A., Arizona State University, 2007.

[7] Antonio Jesús López Moreno. *Nother: La Creación Del Álgebra Abstracta.* Genios de la matemática. RBA. 2017.

[8] L.D. Landau y E.M. Lifshitz. *Mecánica.* Curso de física teórica. Volumen 2.

[9] Felix Gotti. *Ideal Theory and Prüfer Domains.* Department of Mathematics, MIT, Cambridge, MA 0213.

[10] P. J. Olver. *Noether's Two Theorems. Adventures in Integration by Parts.* University of Minnesota, 2015.

[11] John. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* 2da edición. Springer.

Índice general