

Clasificación de nudos hasta 8 cruces

Aprendiz: Mateo Alessi
Mentor: O'Bryan Cárdenas-Andaur

Agosto 2025

Índice

1. Resumen	3
2. Introducción	3
2.1. Proyecciones y diagramas	6
2.2. Algunas operaciones sobre nudos	8
2.3. Movimientos de Reidemeister	10
3. Invariantes de nudos y enlaces	11
3.1. 3-coloreo	13
4. Polinomio de Jones	16
4.0.1. Corrección vía writhe	19
4.1. Otra versión del polinomio de Jones	20
4.1.1. Modelo de sumas de estados para el corchete de Kauff- man	20
4.1.2. El polinomio de Jones y su relación de madeja	21
5. Nudos hasta ocho cruces	24
6. Bibliografía	39

1. Resumen

En este trabajo se realizará una breve introducción a la teoría de nudos. Se comenzará dando las definiciones de nudos en \mathbb{R}^3 y sus diagramas en \mathbb{R}^2 , también de los Δ -movimientos y su relación con los diagramas regulares.

Posteriormente se hablará sobre los movimientos de Reidemeister y el costo computacional asociado a utilizarlos para clasificar nudos. Así también sobre la utilidad de estos para definir invariantes de nudos a partir de invariantes de diagramas. De estos últimos, se mostrarán invariantes combinatorios y polinómicos.

Para finalizar, se utilizarán los invariantes antes presentados para distinguir los nudos de hasta 8 cruces.

2. Introducción

En principio, podemos pensar los nudos como cuerdas cerradas en el espacio tridimensional. Además, dos nudos se dirán equivalentes si al deformar (estirar/contrair, mover, enredar/desenredar) uno de ellos se llega al otro. La única acción que tenemos prohibida es cortar la cuerda y luego volver a pegarla.

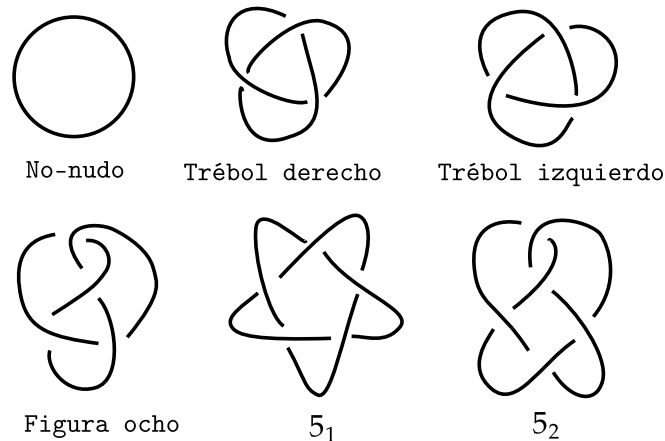


Figura 1: Ejemplos de distintos nudos

Observación 2.1. Algunos nudos, como los de la imagen anterior, reciben nombres por razones históricas, mientras que la mayoría se nombra indexándolos por el crossing number (invariante que veremos posteriormente) en las tablas estandarizadas.

Los ejemplos mostrados en la Figura 1 son en realidad lo que denominamos **diagramas de nudos**, es decir, representaciones planas: proyecciones de los nudos tridimensionales en un plano con información adicional en los cruces indicando qué arco pasa por arriba y cual por debajo, indicándolo con una discontinuidad en uno de los arcos. Aunque los nudos sean objetos tridimensionales, estas representaciones son mucho más fáciles de trabajar.

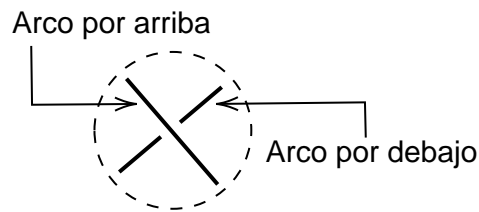


Figura 2: Representación del corte

Como una cuerda puede ser modificada por los movimientos mencionados anteriormente (estirar/contraer, mover, enredar/desenredar), un nudo puede tener muchos diagramas diferentes.

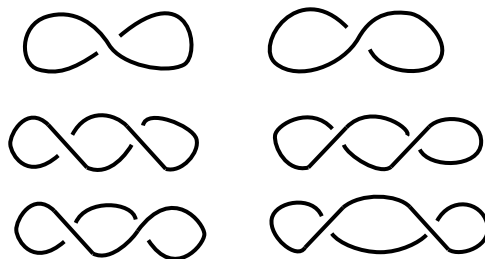


Figura 3: Representaciones del no-nudo distintas

Observación 2.2. *En la figura 3 podemos ver todos los posibles diagramas de 1 y 2 cruces. Claramente, todos ellos son equivalentes al no-nudo.*

Para describir formalmente un nudo se puede pensar en curvas paramétricas en \mathbb{R}^3 utilizando funciones vectoriales continuas con dominio $I = [0, 1]$. Además, le pedimos a estas funciones que sean inyectivas, para que el nudo no se interseque consigo mismo, y que tengan el mismo valor en el inicio y el final del intervalo, para que el nudo sea una curva cerrada.

El problema que surge con la definición anterior es que deja la puerta libre a nudos denominados “salvajes”, por ejemplo un nudo compuesto por infinitos tréboles.

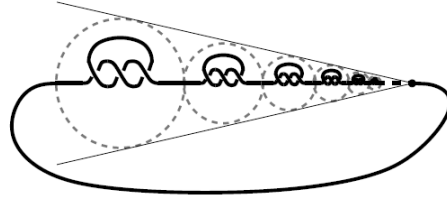


Figura 4: Un nudo salvaje formado por infinitos tréboles

Además, es necesario formalizar la definición de equivalencia para que no todos los nudos sean equivalentes al no nudo, pues si solo hablamos de deformación continua se podría contraer cualquier nudo hasta tener un único punto.

Para solucionar estos problemas se da la siguiente definición.

Definición 2.3. Un **nudo** K es un subconjunto de \mathbb{R}^3 formado por la unión finita de segmentos de recta:

$$K = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{N-2}, a_{N-1}] \cup [a_{N-1}, a_0]$$

donde los segmentos son disjuntos dos a dos excepto cuando son consecutivos, en tal caso tienen un único punto de intersección.

Los nudos que cumplen la anterior definición suelen denominarse poligonales y pertenecen a la clase de nudos “dóciles”.

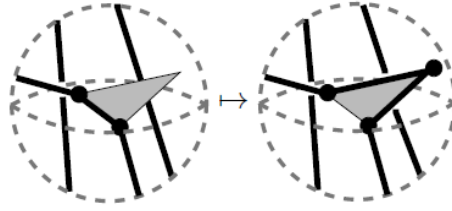
Ejemplo 2.4. Un diagrama del nudo trébol hecho con seis segmentos rectos



Figura 5: Un nudo trébol hecho con segmentos de rectas

Definición 2.5. Dado un nudo K en \mathbb{R}^3 con $[a_i, a_{i+1}]$ uno de sus lados, suponemos que $T = [a_i, x, a_{i+1}]$ es un triángulo cerrado en \mathbb{R}^3 que interseca a K solo a lo largo del lado $[a_i, a_{i+1}]$. Así, podemos pensar en que estamos trasladando el lado $[a_i, a_{i+1}]$ a lo largo del triángulo sin tocar otra parte del nudo. Es decir, reemplazamos el lado $[a_i, a_{i+1}]$ de K por otros dos nuevos $[a_i, x] \cup [x, a_{i+1}]$ quedando un nuevo K' con un lado más en total. Este tipo de movimiento se denomina Δ -movimiento y se ilustra en la Figura 6.

Los movimientos dados en la definición anterior son de uso básico para definir la relación de equivalencia entre nudos.

Figura 6: Representación de un Δ -movimiento

Definición 2.6. Dos nudos K y J son **equivalentes** (o isotópicos) si existe una secuencia intermedia finita de nudos $K = K_0, K_1, \dots, K_n = J$ tales que cada par K_i, K_{i+1} está relacionado por un Δ -movimiento o la inversa de un Δ -movimiento.

Usando la definición anterior, tenemos que la equivalencia de nudos es una relación de equivalencia:

- Reflexividad: se cumple usando una secuencia de largo cero.
- Simetría: se cumple gracias a que los Δ -movimiento se pueden revertir.
- Transitividad: debido a la composición de dos secuencias dadas.

Aún usando una definición poligonal de los nudos, la representación visual que usaremos de los mismos y sus diagramas será suave, teniendo siempre en cuenta que se puede aproximar con un polígono con un número grande de lados pequeños.

2.1. Proyecciones y diagramas

Definición 2.7. Sea K un nudo en \mathbb{R}^3 , su **proyección** es $\pi(K) \subseteq \mathbb{R}^2$, donde π es la proyección a lo largo del eje z sobre el plano xy .

Una proyección se dice **regular** si la preimagen de un punto de $\pi(K)$ consiste en uno o dos puntos de K , donde en el segundo caso ninguno de los dos puntos es un vértice de K . Es decir, una proyección regular consiste en una línea poligonal cerrada sobre el plano con solo “puntos dobles transversales” como auto intersecciones.

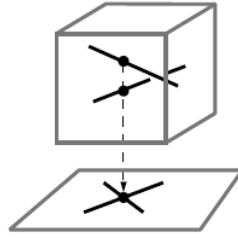


Figura 7: Sección de un diagrama regular con un punto doble

Una proyección se dice **irregular** si tiene algún lado paralelo al eje z , si tres o más puntos están unos sobre otros o si algún vértice está sobre algún otro punto de K .

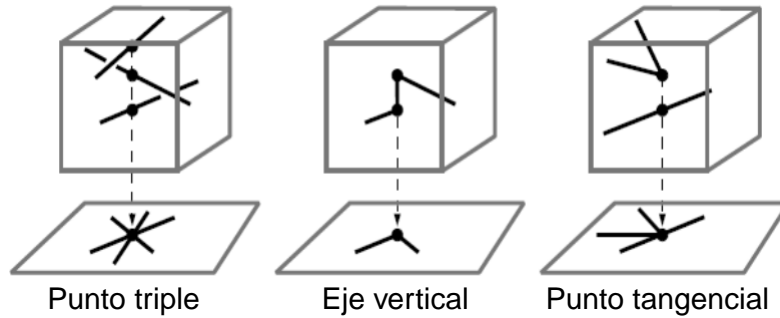


Figura 8: Secciones de diagramas irregulares

Definición 2.8. Si el nudo K tiene una proyección regular, podemos definir su correspondiente diagrama de nudo D re-dibujando con un arco roto cerca de cada cruce (lugar donde la preimagen sobre K tiene dos puntos) para visualizar qué arco pasa por arriba o por debajo.

Definición 2.9. Definimos una ϵ -**perturbación** de un nudo K en \mathbb{R}^3 a otro nudo K' obtenido al mover uno o más vértices de K una distancia menor a ϵ , y luego reconectándolos con líneas rectas como lados de la misma forma en la que estaban en K .

Usando un ϵ suficientemente pequeño, las ϵ -perturbaciones de K serán equivalentes a K .

Lema 2.10. El conjunto de nudos con proyecciones regulares es abierto y denso en el espacio de los nudos. Es decir, cumple las siguientes propiedades:

1. Si K tiene una proyección irregular, entonces existe una ϵ -perturbación suficientemente pequeña K' , equivalente a K , tal que su proyección es regular.

2. Si K tiene una proyección regular, entonces cualquier ϵ -perturbación suficientemente pequeña tiene una proyección regular.

Lo anterior implica que si K tiene una proyección irregular, solo debe ser perturbado un poco para que la proyección sea regular.

Corolario 2.11. *Todo nudo K tiene un diagrama D_K . De un diagrama D se puede recuperar el nudo K tal que $D_K = D$. Cualquier nudo con un diagrama sin cruces es el no-nudo.*

Demo: Por el Lema 2.10 todo nudo tiene una proyección regular, luego tiene un diagrama.

La reconstrucción de un nudo a través de su diagrama no es única en \mathbb{R}^3 , salvo clases de equivalencia. Esto debido a que dos nudos con el mismo diagrama son equivalentes mediante Δ -movimientos.

Por lo mencionado, si un nudo tiene un diagrama sin cruces, es equivalente al no-nudo. □

2.2. Algunas operaciones sobre nudos

Definición 2.12. *Un **enlace** es una colección finita de nudos disjuntos en \mathbb{R}^3 , cada nudo del enlace es llamado componente. La relación de equivalencia se define de la misma manera que antes. Luego, un nudo es un enlace de una componente.*

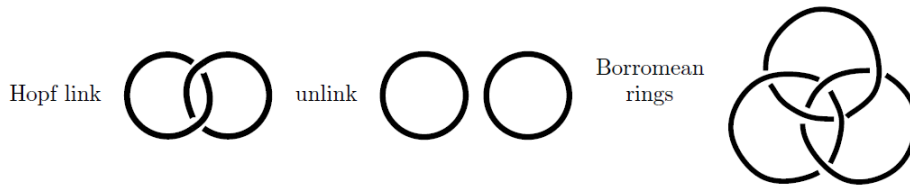


Figura 9: Distintos enlaces

Definición 2.13. *La **imagen especular** \overline{K} de un nudo K se obtiene reflejando K sobre un plano en \mathbb{R}^3 . También se lo puede definir como sigue: dado un diagrama D de K , se cambian todos los cruces de D .*

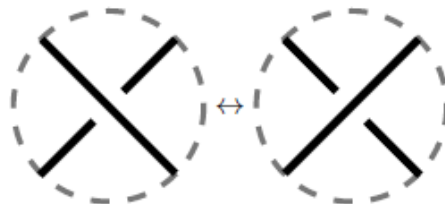


Figura 10: Cambio en los cruces de D

Definición 2.14. Un nudo es **anfiquiral** si es equivalente a su imagen especular.

Definición 2.15. Un nudo **orientado** es aquel en el cual se elige una dirección o flecha de circulación a lo largo de todo el nudo. Bajo equivalencia, esta dirección también se mantiene, por lo tanto, se habla de equivalencia que preserva la orientación de nudos orientados.



Figura 11: Trébol orientado

Definición 2.16. EL **reverso** rK de un nudo orientado K es el mismo nudo pero con la orientación opuesta. El **inverso** $r\bar{K}$ es la composición del reverso y la imagen especular del nudo K . Si K es equivalente a su reverso o inverso, se le dice reversible o invertible según corresponda.

Definición 2.17. Dados K_1, K_2 nudos orientados, definimos su **suma conexa** $K_1 \# K_2$ recortando una pequeña porción de arco de ambos nudos y uniéndolos los extremos, sin agregar cruces adicionales, para obtener un nuevo nudo, asegurándonos de que la orientación sea consistente.

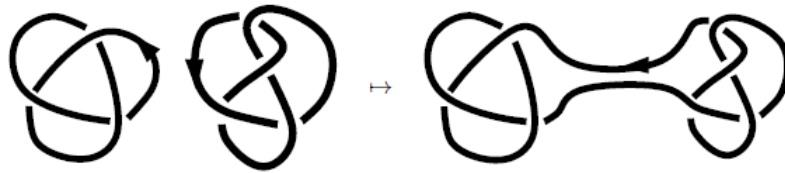


Figura 12: Ejemplo de una suma conexa entre un trébol y un nudo ocho

Observación 2.18. Los nudos orientados forman un semigrupo bajo la operación de suma conexa.

Definición 2.19. Un **diagrama alternante** D de un nudo K es un diagrama tal que, empezando desde un punto arbitrario y recorriendo todo el nudo, los cruces se recorren pasando alternantemente por debajo y por encima. Un **nudo alternante** K es aquel que posee algún diagrama alternante.



Figura 13: Diagramas alternante y no alternante de un nudo trébol

2.3. Movimientos de Reidemeister

Definición 2.20. Dado un nudo K y su diagrama D se definen los *movimientos de Reidemeister*:

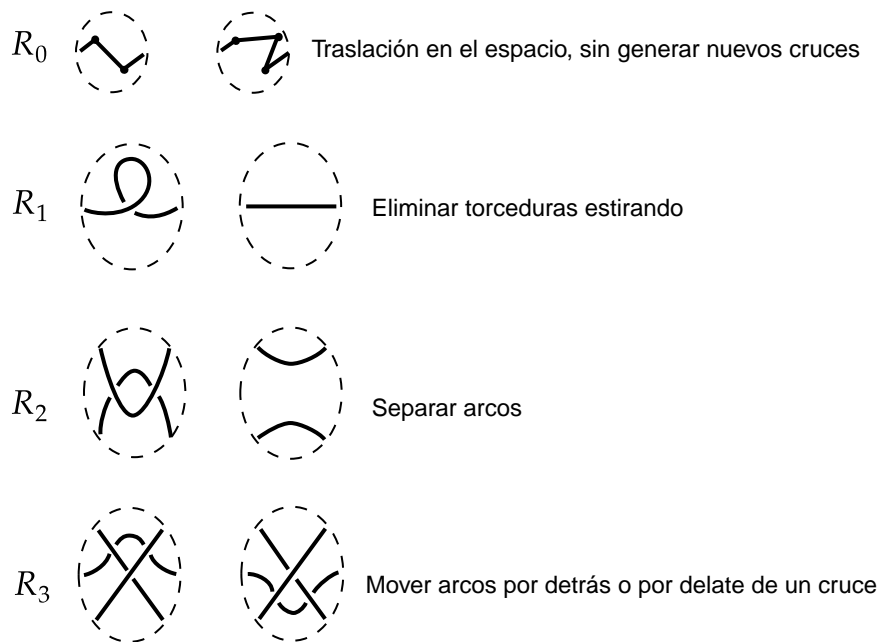


Figura 14: Movimientos de Reidemeister

Las imágenes indican sectores circulares del plano y la porción del diagrama de nudo contenida. El movimiento es local y dentro de la porción del diagrama mostrada, todo lo demás se deja intacto. Además, el movimiento R_0 se lo dibuja más pequeño ya que es menos relevante que los demás.

Teorema 2.21. (Teorema de Reidemeister)

Dos nudos K, K' con diagramas D, D' son equivalentes si y sólo si sus diagramas están relacionados por una secuencia finita de diagramas inter-

medios $D = D_0, D_1, \dots, D_n = D'$, donde cada par D_i, D_{i+1} está relacionado por algún movimiento de Reidemeister.

El movimiento R_0 es una versión planar de los Δ -movimientos, y la relación de equivalencia que genera se conoce como *isotopía planar*.

El teorema de Reidemeister prueba una biyección entre las siguientes clases de equivalencia:

- La clase de equivalencia de los nudos poligonales en \mathbb{R}^3 junto con la equivalencia dada por los Δ -movimientos.
- Los diagramas de nudos poligonales en \mathbb{R}^2 con los movimientos de Reidemeister.

En la siguiente figura se muestra la equivalencia de dos diagramas del nudo trébol mediante los movimientos de Reidemeister

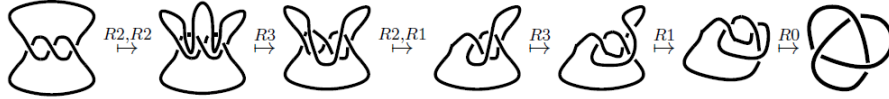


Figura 15: Transformación de un nudo de tres cruces al diagrama de un trébol

Si bien el teorema de Reidemeister permite clasificar distintos nudos, saber si dos nudos cualesquiera están o no relacionados es un problema de computación inabarcable.

Teorema 2.22. (Coward y Lackenby, 2010)

Si D y D' son dos diagramas del mismo nudo, ambos teniendo menos de n cruces, entonces existe una secuencia de movimientos de Reidemeister relacionando los diagramas de longitud menor que $R(n)$, donde

$$R(n) = 2^{2^{\dots^{2^n}}}$$

con la torre de 2s siendo de $10^{1000000n}$ de largo.

3. Invariantes de nudos y enlaces

Definición 3.1. Un *invariante de nudos o enlaces* es una función $i : \mathcal{L} \rightarrow X$ que depende exclusivamente de las clases de equivalencia. Usualmente, X será un conjunto “bien entendido”, es decir, en el que se pueden diferenciar sus elementos fácilmente.

Dependiendo del conjunto X utilizado, existen distintas clases de invariantes, por ejemplo, numéricos o combinatorios (crossing number, número de componentes, etc.) y polinomiales (polinomio de Jones), entre otros.

Observación 3.2. *Un invariante i solo diferencia nudos de distintas clases de equivalencia, es decir, si K y K' son equivalentes, entonces $i(K) = i(K')$. Y si $i(K) \neq i(K')$, entonces K, K' no son equivalentes. Pero si $i(K) = i(K')$ no podemos asegurar que sean equivalentes. Como ejemplo de esto último, la función i que va del conjunto de nudos al valor 0 para todos los nudos es un invariante válido, pero no es funcional.*

El teorema de Reidemeister es útil para definir invariantes sobre nudos mediante la definición de invariantes sobre diagramas. Para que una función sea un invariante, debe tomar el mismo valor para todos los diagramas de un nudo dado. La forma en que probamos esto es observando si los valores de la función cambian si se aplica un movimiento de Reidemeister.

Definición 3.3. *El **crossing number** $c(K)$ de un nudo K es el mínimo número de cruces en cualquier diagrama del nudo. Un diagrama minimal de K es aquel tal que tiene $c(K)$ cruces.*

Definición 3.4. *El **unknotting number** $u(D)$ de un diagrama D , de un nudo K , es el mínimo número de cruces que se deben cambiar para convertir el diagrama D en un diagrama del no-nudo. El **unknotting number** $u(K)$ de un nudo K es el mínimo unknotting number $u(D)$ sobre todos los diagramas D de K .*

Lema 3.5. *Cualquier diagrama de un nudo puede ser cambiado al diagrama del no-nudo cambiando algunos de sus cruces.*

Observación 3.6. *Por su definición, el crossing number y el unknotting number son invariantes de nudos.*

Definición 3.7. *El **número de componentes** $\mu(L)$ de un enlace L es un invariante de enlaces. Los movimientos de Reidemeister no agregan componentes.*

Definición 3.8. *Sea D un diagrama de un nudo orientado. El **total linking number** $Lk(D)$ se obtiene tomando la mitad de la suma, sobre todos los cruces, de las contribuciones dadas por*

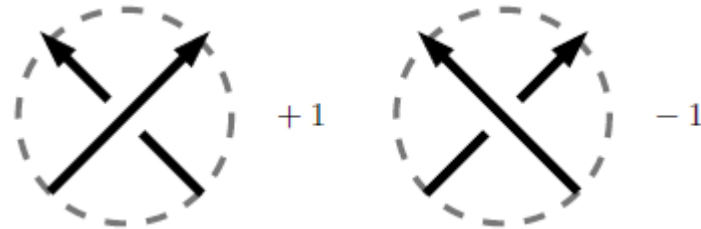


Figura 16: Signos para calcular el linking number

si los dos arcos participantes pertenecen a distintas componentes del enlace, y 0 si pertenecen al mismo.

Teorema 3.9. *Si D, D' son dos diagramas de un enlace orientado L , entonces $Lk(D) = Lk(D')$, es decir, el total linking number es un invariante de enlaces.*

Demo:

Si dos diagramas difieren por una secuencia de movimientos de Reidemeister, orientados, debemos probar que cualquiera de estos preserva el linking number.

R_0 preserva la isotopía planar, luego no modifica el número de cruces. En los demás casos, solo hay que analizar la contribución local del movimiento de Reidemeister.

En R_1 , por un lado tenemos un cruce sobre la misma componente y por el otro solo un arco, luego no aporta valor a la suma final.

En R_2 , en un lado tenemos dos cruces extras: Si los arcos pertenecen a la misma componente, no aportan valor a la suma final. Si los arcos son de componentes distintas, sus contribuciones son iguales y opuestas, luego, sus aportes se cancelan entre sí.

En R_3 , cada uno de los tres cruces de un lado tiene su contraparte en el otro, luego la suma de los tres cruces en cualquiera de los dos lados es la misma.

Así, el total linking number no varía con los movimientos de Reidemeister y, por lo tanto, es un invariante. \square

Ejemplo 3.10. *El teorema anterior nos permite diferenciar dos enlaces de Hopf, uno con orientación positiva y el otro con orientación negativa.*

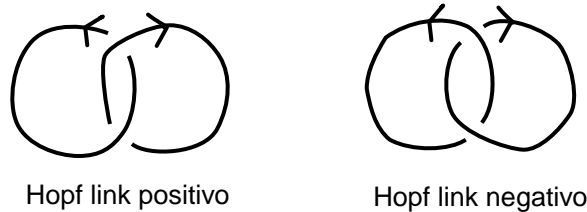


Figura 17: Enlaces de Hopf

3.1. 3-coloreo

El siguiente invariante se define de manera puramente combinatoria.

Definición 3.11. *Sean tres colores, por ejemplo: rojo, azul y amarillo. Si D es un diagrama no orientado de un enlace, podemos pintar cada arco de D*

con alguno de los tres colores elegidos. Si hay m arcos, entonces existen 3^m posibles asignaciones de colores, pero solo nos interesa el subconjunto $T(D)$, llamado conjunto de **3-coloreos**, que satisface la siguiente regla:

- En cada cruce de D , el número de colores es 1 o 3.

Denotamos por $\tau(D)$ el número de elementos de $T(D)$, es decir, $\tau(D)$ es el número de 3-coloreos del diagrama.

Observación 3.12. Todo diagrama tiene al menos tres 3-coloreos, esto debido a los 3 coloreos monocromáticos posibles. El número de 3-coloreos se define de forma equivalente tanto para enlaces como para nudos.

Los diagramas estándar del no-nudo y del trébol tienen tres y nueve 3-coloreos respectivamente.

Teorema 3.13. El número de 3-coloreo es un invariante de enlaces $\tau(L)$.

Demo: Dados dos diagramas D, D' de un nudo K , veremos que existe una biyección entre $T(D)$ y $T(D')$ (en consecuencia, $\tau(D) = \tau(D')$), cuando D y D' difieren en un solo movimiento de Reidemeister.

R_0 no modifica nada.

En R_1 , cualquier 3-coloreo del lado izquierdo de la imagen obliga a tener el mismo color c a ambos arcos involucrados. Luego, este coloreo define un coloreo en el lado derecho de la imagen. Lo mismo resulta a la inversa. Así, existe una biyección entre $T(D)$ y $T(D')$. Entonces, $\tau(D) = \tau(D')$ bajo R_1 .

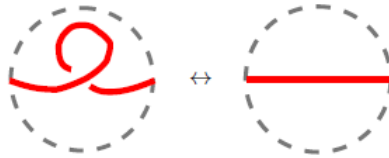


Figura 18: 3-coloreo en R_1

En R_2 , tenemos dos posibilidades de coloreo del lado izquierdo de la imagen. En ambos casos, los dos arcos de arriba tienen el mismo color a y los dos arcos de abajo el mismo color b . Si $a = b$, entonces el tercer arco, en el centro de la imagen, debe ser del mismo color. Y si $a \neq b$, el arco central es de un tercer color c . En cualquier manera, se define un coloreo en el lado derecho de la imagen, y a su vez, estos definen un coloreo en el lado izquierdo de la imagen.

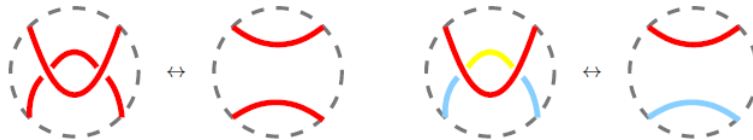


Figura 19: 3-coloreo en R_2

En R_3 , tenemos cinco casos a considerar. Los arcos involucrados pueden tener todos el mismo color, todos diferentes o dos de un color y un tercero de otro (teniendo tres casos acorde a cuál arco sea el de color distinto). En cualquiera de las situaciones, el coloreo de la izquierda induce un coloreo en la derecha de la imagen, y viceversa, tal como se muestra abajo.

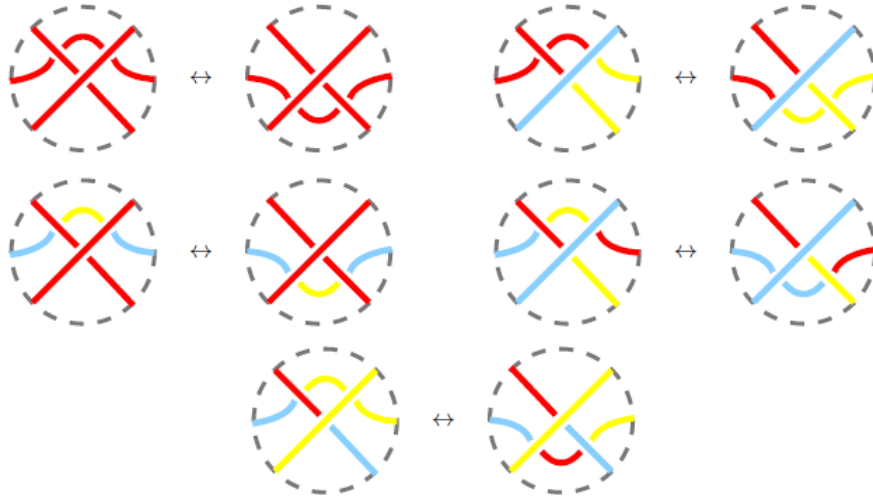


Figura 20: 3-coloreo en R_3

Por lo tanto, el número de 3-coloreo es un invariante de enlaces. \square

El siguiente teorema, que no demostraremos, nos es útil para poder calcular el número de 3-coloreo de un nudo de manera algebraica, asociando los cruces y arcos del nudo con una matriz.

Teorema 3.14. *Sea D un diagrama de un nudo. Entonces, $T(D)$ es un \mathbb{F}_3 -espacio vectorial. Luego, $\tau(D) = 3^{\dim(T(D))}$, es decir, una potencia de tres.*

Ejemplo 3.15. *Calcularemos el número de 3-coloreos del nudo 5_2 . En la matriz asociada los cruces representan las filas y los arcos las columnas. La entrada $a_{i,j}$ de la matriz vale 1 si el arco j es parte del cruce i y 0 en otro caso.*

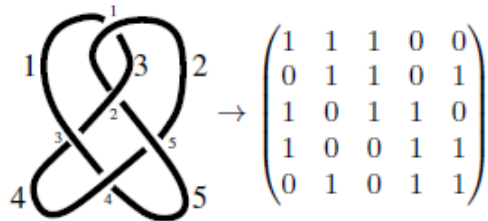


Figura 21: Matriz asociada al nudo 5_2

Luego, $\dim(T(D))$ es simplemente la nulidad de la matriz dada (los cálculos deben hacerse teniendo en cuenta que los números de la matriz deben estar en módulo 3).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 22: Matriz asociada a 5_2 reducida

Así, $\dim(T(D)) = 1$. Por lo tanto, $\tau(5_2) = 3$.

Observación 3.16. *En las matrices asociadas a los nudos, después de hacer su reducción siempre habrá una fila nula. Esto corresponde a los 3 coloreos triviales.*

Definición 3.17. *Llamaremos a un nudo K 3-coloreable si $\tau(K) > 3$, es decir, posee 3-coloraciones distintas a las monocromáticas.*

4. Polinomio de Jones

Definición 4.1. *EL corchete de Kauffman de un diagrama no orientado D de un enlace, es un polinomio de Laurent $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$, definido por las siguientes reglas:*

1. Es un invariante bajo isotopía planar (R_0).
2. Satisface la relación de madeja

$$\langle \text{Círculo con } X \rangle = A \langle \text{Círculo con arco superior} \rangle + A^{-1} \langle \text{Círculo con arco inferior} \rangle$$

Figura 23: Relación de madeja del corchete de Kauffman

que es una relación lineal entre el corchete de Kauffman de tres diagramas que difieren únicamente dentro de los círculos marcados y son iguales fuera de este.

3. Satisface $\langle D \sqcup U \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D \rangle$, donde U es el no-nudo con su diagrama estándar. Es decir, un no-nudo disjunto puede ser removido multiplicando por $-A^2 - A^{-2}$.
4. Vale 1 en el no-nudo con su diagrama estándar, es decir, $\langle U \rangle = 1$.

Veamos algunos ejemplos del cálculo del corchete de Kauffman:

Ejemplo 4.2. Utilizando las reglas 4 y 3 podemos calcular el corchete de Kauffman del diagrama estándar del no-nudo y de la unión disjunta de dos no-nudos, respectivamente, como se ve en las siguientes figuras

$$\langle \bigcirc \rangle = 1.$$

$$\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}).$$

De manera análoga, y utilizando el cálculo anterior, podemos obtener el corchete de Kauffman del diagrama de tres no-nudos disjuntos.

$$\langle \bigcirc \bigcirc \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})^2$$

Si consideramos un diagrama del no-nudo con un cruce podemos utilizar la relación de madeja (regla 2) para obtener lo siguiente

$$\langle \infty \rangle = A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \infty \rangle$$

El primer término de la derecha ya lo hemos calculado. En el segundo, utilizando isotopía planar, llegamos a que coincide con el diagrama estándar del no-nudo. Así, el corchete es igual a $A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}$ y por lo tanto

$$\langle \infty \rangle = -A^3$$

Análogamente, vemos el resultado del otro diagrama de un cruce del no-nudo

$$\langle \infty \rangle = A \langle \infty \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) = -A^{-3}$$

Para finalizar, con cálculos análogos llegamos a que

$$\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = -A^{-3} \quad \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = -A^3.$$

Observación 4.3. Notemos que el corchete de Kauffman no es un invariante de enlaces. Esto se evidencia en los cálculos anteriores: toma distintos valores para diagramas distintos del mismo nudo.

Ejemplo 4.4. Ahora, apliquemos la relación de madeja al diagrama del trébol izquierdo.

$$\begin{aligned}
 \langle \text{trébol izquierdo} \rangle &= A \langle \text{trébol izquierdo} \rangle + A^{-1} \langle \text{trébol izquierdo} \rangle. \\
 &= A \left\{ A \langle \text{trébol izquierdo} \rangle + A^{-1} \langle \text{trébol izquierdo} \rangle \right\} + A^{-1} \left\{ A \langle \text{trébol izquierdo} \rangle + A^{-1} \langle \text{trébol izquierdo} \rangle \right\}. \\
 &= A^2(-A^2 - A^{-2}) \langle \infty \rangle + 1 \cdot \langle \infty \rangle + 1 \cdot \langle \infty \rangle + A^{-2} \langle \text{trébol izquierdo} \rangle. \\
 &= (-A^4 + 1)(-A^3) + A^{-2}(-A^{-3}) = A^7 - A^3 - A^{-5}.
 \end{aligned}$$

Figura 24: Corchete de Kauffman del trébol izquierdo

Observación 4.5. Analizando los siguientes diagramas, llegamos a que el corchete de Kauffman no es invariante bajo los movimientos de Reidemeister de tipo R_1 . En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{trébol izquierdo} \rangle &= A \langle \text{trébol izquierdo} \rangle + A^{-1} \langle \text{trébol izquierdo} \rangle = (-A^3) \langle \text{trébol izquierdo} \rangle. \\
 \langle \text{trébol izquierdo} \rangle &= A \langle \text{trébol izquierdo} \rangle + A^{-1} \langle \text{trébol izquierdo} \rangle = (-A^{-3}) \langle \text{trébol izquierdo} \rangle.
 \end{aligned}$$

Figura 25: Corchete de Kauffman sobre el movimiento R_1

Lema 4.6. El Corchete de Kauffman es invariante bajo los movimientos de Reidemeister de tipo R_2 y R_3 .

Demo:

Para R_2 (Figura 26), aplicamos la relación de madeja dos veces, removemos el círculo pequeño con la multiplicación del término correspondiente, luego cancelamos los términos entre sí para llegar al resultado final.)

Para R_3 (Figura 27), aplicamos la relación de madeja una vez y utilizamos lo visto para R_2 , luego analizamos la simetría vertical para llegar al resultado final.

□

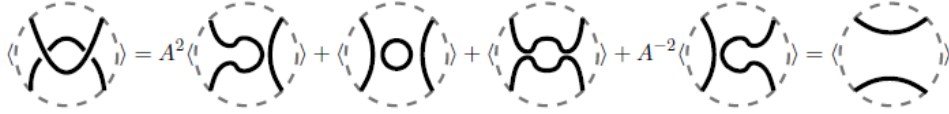


Figura 26: Corchete de Kauffman sobre el movimiento R_2

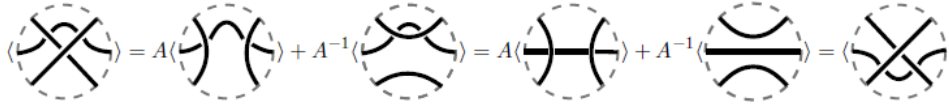


Figura 27: Corchete de Kauffman sobre el movimiento R_3

4.0.1. Corrección vía writhe

Definición 4.7. Si D es un diagrama orientado de un enlace, entonces el **writhe** $w(D)$ es la suma de los signos de todos los cruces de D .

Lema 4.8. Si D es un diagrama orientado de un enlace, entonces el **writhe** $w(D)$ es invariante bajo los movimientos de Reidemeister de tipo R_2 y R_3 , pero cambia con ± 1 bajo R_1 .

Demo:

La demostración para R_2 y R_3 es similar, y más sencilla, que la dada en la demostración 3, ya que no hace falta analizar si los cruces involucrados pertenecen o no a distintas componentes.

Para R_1 , tenemos las siguientes identidades independientemente de la orientación del enlace:

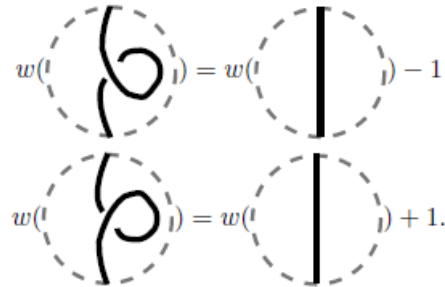


Figura 28: Writhe sobre el movimiento R_1

□

Teorema 4.9. Si D es un diagrama orientado de un enlace, entonces el polinomio $f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ es invariante bajo los tres movimientos de Reidemeister, es decir, el polinomio define un invariante de enlaces orientados.

Al polinomio $f_D(A)$ lo denominamos, después de un cambio de variables que veremos en la próxima sección, **Polinomio de Jones**.

Demo:

Bajo los movimientos R_2 y R_3 el corchete de Kauffman y el writhe son invariantes, luego $f_D(A)$ también lo es.

Bajo R_1 , si al diagrama D se lo altera bajo un cruce** (torcedura) positivo, entonces el corchete de Kauffman agrega multiplicando $(-A^3)$ y el writhe incrementa en 1; luego $f_D(A)$ no se modifica, ya que las contribuciones anteriores se cancelan entre sí. De manera similar sucede con un cruce negativo.

Por lo tanto, el polinomio $f_D(A)$ es un invariante de enlaces orientados. □

4.1. Otra versión del polinomio de Jones

Daremos otra forma, más eficiente, de calcular el polinomio del Jones mediante el modelo de suma de estados.

4.1.1. Modelo de sumas de estados para el corchete de Kauffman

A continuación, introduciremos notación que nos permitirá calcular el corchete de Kauffman a través de la aplicación sucesiva de su relación de madeja.

Definición 4.10. *Un estado s de un diagrama D es una asignación de $+1$ o -1 a cada cruce. Un diagrama con c cruces, por lo tanto, tendrá 2^c estados. Dado un estado s en D , podemos formar un nuevo diagrama sD resolviendo o suavizando los cruces de D , esto es reemplazar*



Figura 29: Suavizado de cruces

acorde con el estado tomando el valor $+1$ o -1 en el cruce. Luego, sD es un diagrama sin cruces que consiste solamente en un número de círculos disjuntos. Denotamos la cantidad de círculos por $|sD|$. Para un estado s , sea $\sum s$ la suma de los signos de los cruces.

Observación 4.11. *El valor de $\sum s$ está entre $+c$ y $-c$ y, además, tiene siempre la misma paridad que c . Si s, t son dos estados del diagrama D que difieren en un solo cruce, entonces $|sD| = |tD| \pm 1$.*

Proposición 4.12. *El Corchete de Kauffman puede ser expresado explícitamente por la “suma de estados” dada por*

$$\langle D \rangle = \sum_s \langle D|s \rangle,$$

donde s recorre todos los estados de D , y $\langle D|s \rangle$ denota la contribución de cada estado, esto es

$$\langle D|s \rangle = A^{\sum s} (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}$$

Demo:

Numeramos los cruces de D desde 1 hasta c . Aplicamos la relación de madeja del corchete de Kauffman al cruce número 1, reduciendo $\langle D \rangle$ a una combinación lineal de corchetes de otros dos diagramas, cada uno de estos con sus cruces numerados del 2 hasta c . Aplicando la relación de madeja a estos dos nuevos diagramas en el cruce número 2, obtenemos una combinación lineal de cuatro diagramas, cada uno de ellos con sus cruces numerados del 3 hasta c . Repitiendo el proceso, obtenemos una combinación lineal de 2^c corchetes de diagramas sin cruces, todos ellos indexados por el estado s correspondiente, y precedidos por el prefactor $A^{\sum s}$.

Finalmente, hemos llegado a una fórmula del corchete de Kauffman que no depende explícitamente del orden elegido de los cruces. Es decir, obtuvimos una buena definición del corchete de Kauffman que no depende del orden de aplicación de su relación de madeja a los cruces de D . □

Ejemplo 4.13. Utilizaremos la definición anterior para calcular el corchete de Kauffman del trébol derecho, utilizando el siguiente diagrama con sus cruces numerados de izquierda a derecha:

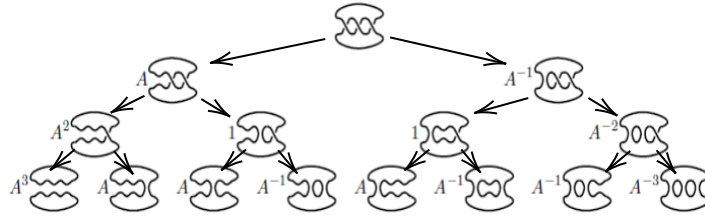


Figura 30: Aplicaciones sucesivas de la relación de madeja al nudo trébol

Los ocho términos obtenidos tienen 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3 círculos correspondientemente, entonces la suma será

$$A^3(-A^2 - A^{-2}) + A + A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A^3(-A^2 - A^{-2})^2$$

que da como resultado $-A^5 + A^{-3} + A^{-7}$.

4.1.2. El polinomio de Jones y su relación de madeja

Definición 4.14. El *polinomio de Jones* $V_L(t)$ de un enlace orientado L es el polinomio obtenido al calcular $f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ sobre cualquier diagrama D de L , al que se le realiza el cambio de variable $A = t^{-1/4}$.

Utilizaremos la notación $V_L(t)$ y $V(L)$ indistintamente.

Teorema 4.15. *El polinomio de Jones satisface los siguientes axiomas:*

1. *Es un invariante de enlaces en el anillo $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$, es decir, respeta los movimientos de Reidemeister.*
2. *El polinomio de Jones del no-nudo es 1.*
3. *Existe una relación de madeja*

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$$

donde L_+, L_-, L_0 son tres enlaces que difieren solo localmente acorde a los siguientes diagramas



Figura 31: Diagramas locales de L_+, L_-, L_0

Demo:

(1) Ya sabemos que el polinomio es un invariante de enlaces orientados, veamos ahora que toma potencias medias de t . Observando la definición del corchete de Kauffman dada en 4.12, vemos que cada estado contribuye con un término que es una potencia de $(-A^2 - A^{-2})$, con potencias pares de A , multiplicadas por $A^{\sum s}$, al corchete $\langle D \rangle$. Como cada suma sobre los cruces $+1$ o -1 tiene la misma paridad que el número de cruces c total del diagrama, la paridad de $\sum s$ no depende del estado, así todas las potencias de A en la suma de estados obtienen la misma paridad que c . Por la misma razón, el writhe $w(D)$ tiene la misma paridad que cD . Entonces, después de incluir el término de corrección $(-A^3)^{w(D)}$, terminamos obteniendo solo potencias pares de A . Luego, el polinomio de Jones involucra solo potencias de $t^{1/2}$.

(2) Sea U el diagrama del no-nudo estándar, luego $w(U) = 0$ y $\langle U \rangle = 1$. Trivialmente, el polinomio de Jones de U es 1.

(3) Compararemos los corchetes de Kauffman de los siguientes tres diagramas D_+, D_-, D_0 en la relación de madeja de Jones. Adicionalmente, definimos el diagrama D_∞ como el diagrama “horizontal”, considerando a D_0 como el “vertical”. Pero, D_∞ no tiene una orientación natural, debido a que induce contradicciones en el resto del enlace. Así que primero aplicamos el corchete de Kauffman al diagrama sin orientación, eliminamos el término introducido por D_∞ y volvemos a recuperar la orientación.

Por la relación de madeja de Kauffman:

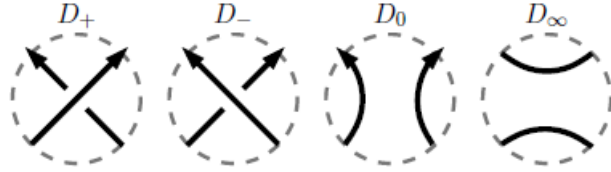


Figura 32: Diagramas locales de D_+, D_-, D_0, D_∞

$$\begin{aligned} \langle D_+ \rangle &= A \langle D_0 \rangle + A^{-1} \langle D_\infty \rangle, \\ \langle D_- \rangle &= A \langle D_\infty \rangle + A^{-1} \langle D_0 \rangle. \end{aligned}$$

Multiplicando por A la primera ecuación, por A^{-1} la segunda ecuación y restándolas, obtenemos:

$$A \langle D_+ \rangle - A^{-1} \langle D_- \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle D_0 \rangle.$$

Sustituyendo $\langle D \rangle = (-A^3)^{w(D)} f(D)$ en cada corchete, el resultado es:

$$\begin{aligned} A(-A^3)^{w(D_0)+1} f(D_+) + A^{-1}(-A^3)^{w(D_0)-1} f(D_-) &= (A^2 - A^{-2})(-A^3)^{w(D_0)} f(D_0) \\ -A^4 f(L_+) + A^{-4} f(L_-) &= (A^2 - A^{-2}) f(L_0), \end{aligned}$$

donde después de la sustitución $A = t^{-1/4}$ y un cambio de signos obtenemos la relación de madeja de Jones. □

Ejemplo 4.16. (1) Sea U_2 el no-enlace. Calculemos $V(U_2)$, para ello utilizamos el siguiente truco:



Figura 33: Diagramas para calcular la relación de madeja de Jones en el no-enlace

Los dos primeros nudos son equivalentes al no-nudo, entonces $V(L_+) = V(L_-) = 1$. Así,

$$t^{-1} \cdot 1 - t \cdot 1 = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(U_2)$$

de aquí obtenemos $V(U_2) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$.

(2) Veamos cómo actúa el polinomio de Jones bajo la unión disjunta de un no-nudo y un enlace. Consideramos un nudo orientado L y lo modificamos agregándole una torcedura positiva y una negativa, obteniendo L_+ y L_- respectivamente. En un análisis local vemos



Figura 34: Diagramas para eliminar círculos disjuntos

Esto nos muestra que L_0 es la unión disjunta que queremos. Como L_+ y L_- son equivalentes a L , utilizando la relación de madeja de Jones obtenemos:

$$V(L \sqcup U) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V(L).$$

(3) Sea H_+ el enlace Hopf positivo. Con H_+ como L_+ , L_- como un enlace de dos no-nudos y L_0 el no-nudo:

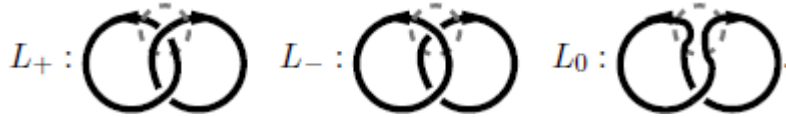


Figura 35: Diagramas para el enlace Hopf positivo

Obtenemos que:

$$t^{-1}V(H_+) - t(-t^{1/2} - t^{-1/2}) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot 1$$

Así, $V(H_+) = -t^{5/2} - t^{1/2}$. Análogamente, obtenemos que para el enlace Hopf negativo H_- , $V(H_-) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$.

5. Nudos hasta ocho cruces

En esta sección utilizaremos los invariantes vistos anteriormente para diferenciar los nudos hasta 8 cruces. A continuación, presentamos una tabla de los mismos.

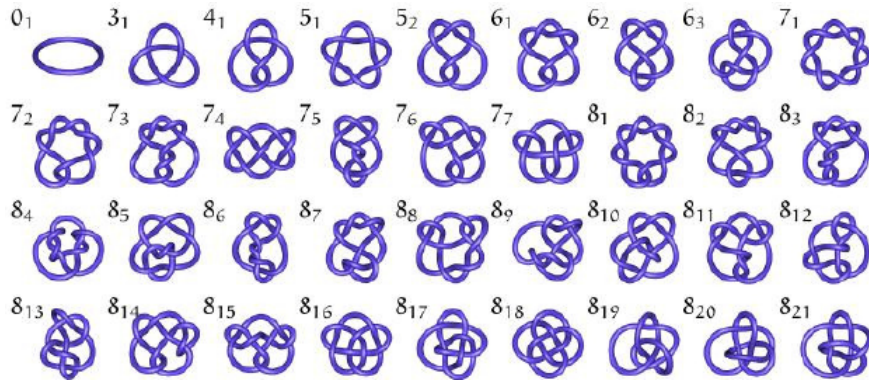


Figura 36: Tabla de nudos hasta 8 cruces

Esta tabla se construye realizando todos los diagramas de nudos posibles con la cantidad de cruces respectivos, de manera similar a lo visto en la Figura 3. Luego, se utilizan los movimientos de Reidemeister para eliminar los nudos que son equivalentes, dejando un solo representante con la menor cantidad de cruces. Los nombres de los nudos se relacionan con su crossing number, pero como es un proceso engorroso y sumamente complicado utilizaremos otros invariantes para poder diferenciarlos.

Para comenzar la clasificación utilizaremos el unknotting number de los nudos para separarlos en tres grupos. A continuación, se muestran diagramas donde se muestra el desanudamiento de varios nudos de la tabla, el proceso empieza con el desanudamiento de algunos cruces para después utilizar movimientos de Reidemeister hasta llegar al no-nudo:

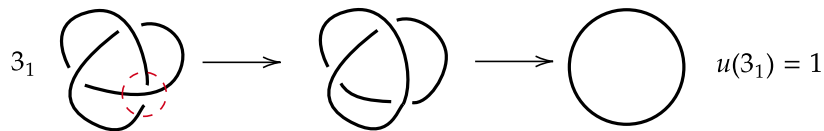


Figura 37: Unknotting number de 3_1

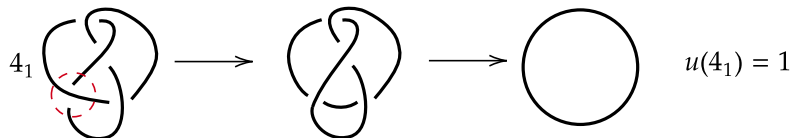


Figura 38: Unknotting number de 4_1

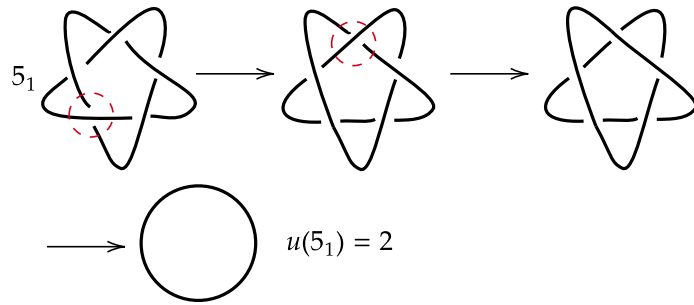


Figura 39: Unknotting number de 5_1

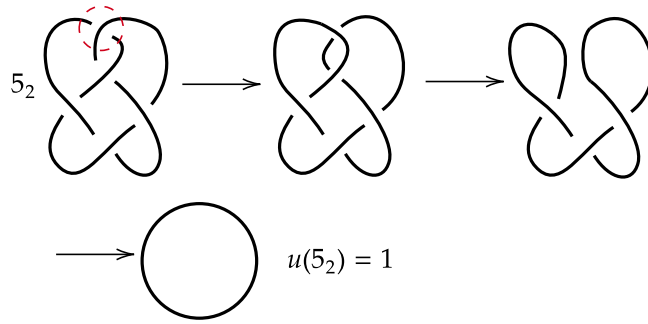


Figura 40: Unknotting number de 5_2

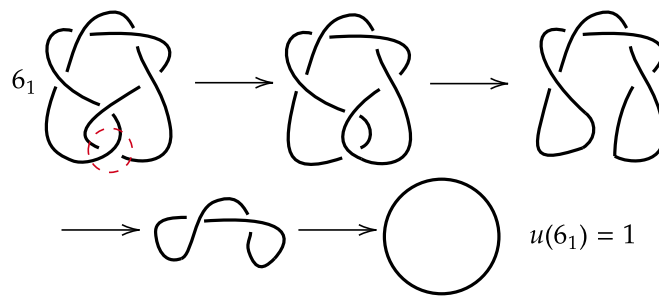


Figura 41: Unknotting number de 6_1

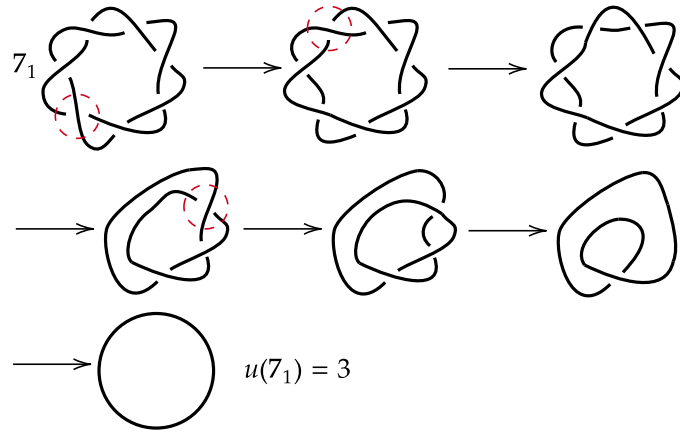


Figura 42: Unknotting number de 7_1

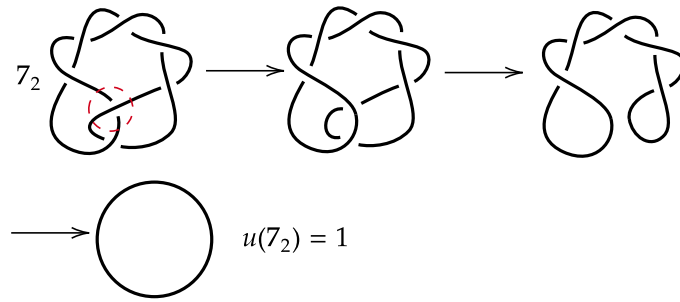


Figura 43: Unknotting number de 7_2

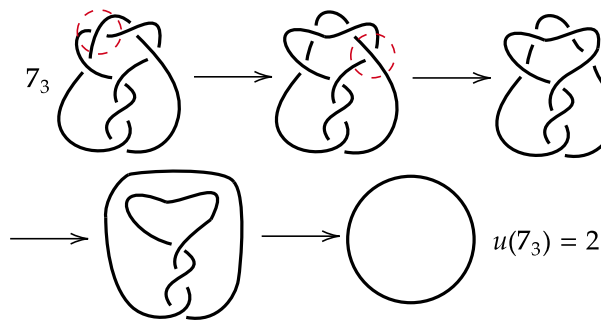


Figura 44: Unknotting number de 7_3

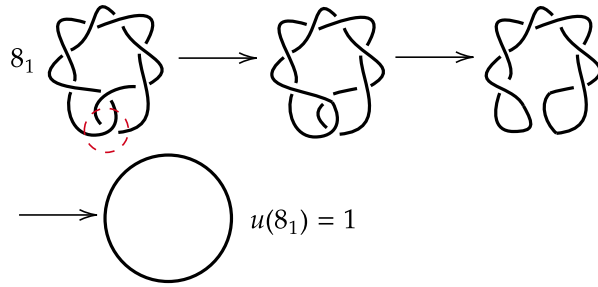


Figura 45: Unknotting number de 8_1

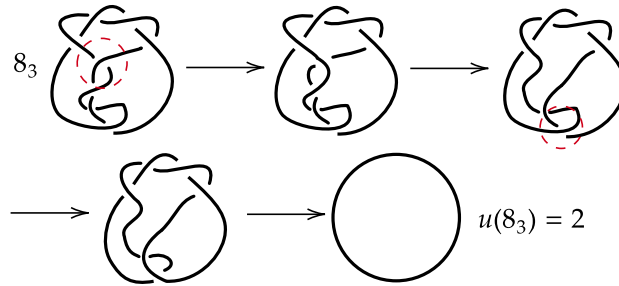


Figura 46: Unknotting number de 8_3

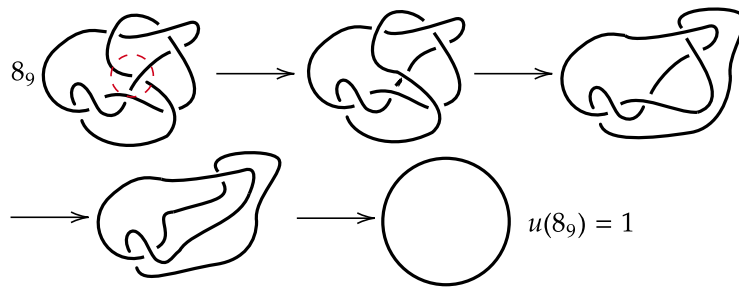


Figura 47: Unknotting number de 8_9

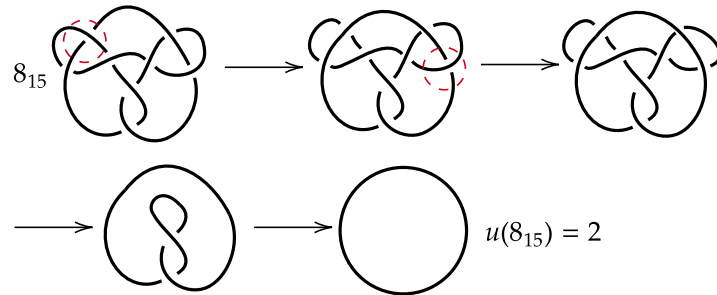


Figura 48: Unknotting number de 8_{15}

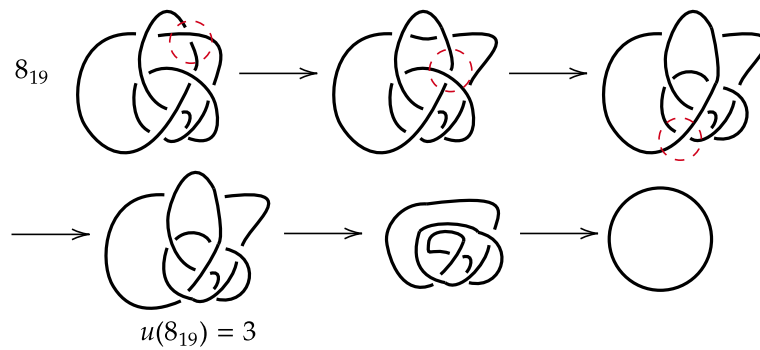


Figura 49: Unknotting number de 8_{19}

Los valores encontrados de unknotting number coinciden con los disponibles en “<https://knotinfo.org>”, de esta manera, tenemos nuestros 36 nudos divididos en tres grupos:

- Grupo 1, unknotting number igual a 1:

$0, 3_1, 4_1, 5_2, 6_1, 6_2, 6_3, 7_2, 7_6, 7_7, 8_1, 8_7, 8_9, 8_{11}, 8_{13}, 8_{14}, 8_{17}, 8_{20}, 8_{21}$.

- Grupo 2, unknotting number igual a 2:

$5_1, 7_3, 7_4, 7_5, 8_2, 8_3, 8_4, 8_5, 8_6, 8_8, 8_{10}, 8_{12}, 8_{15}, 8_{16}, 8_{18}$.

- Grupo 3, unknotting number igual a 3:

$7_1, 8_{19}$.

Para continuar, nos fijaremos si los nudos son 3-colorables (es decir, si tienen más de tres 3-coloreos). Mostraremos algunos de los cálculos hechos:

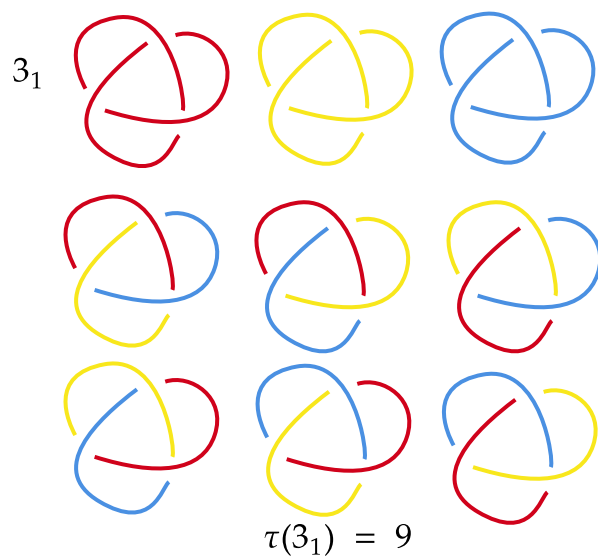


Figura 50: 3-coloreos de 3_1

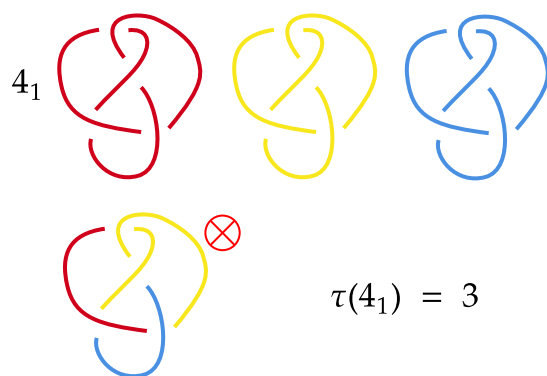


Figura 51: 3-coloreos de 4_1

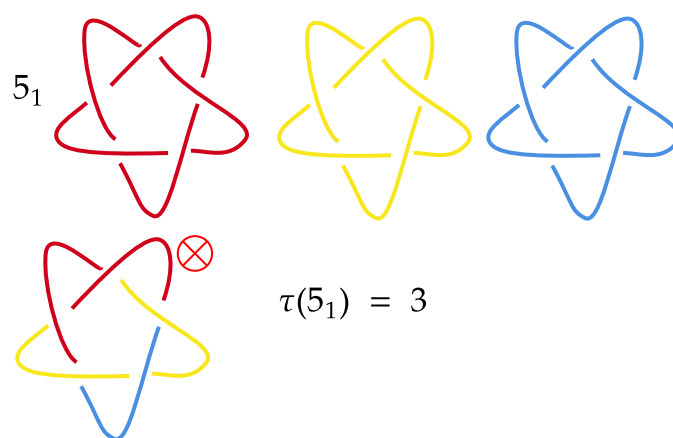


Figura 52: 3-coloreos de 5_1

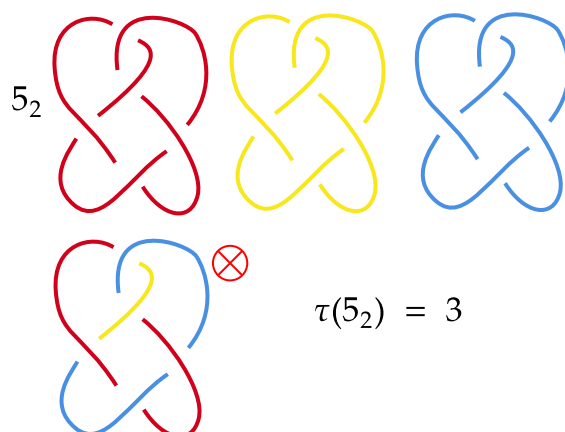


Figura 53: 3-coloreos de 5_2

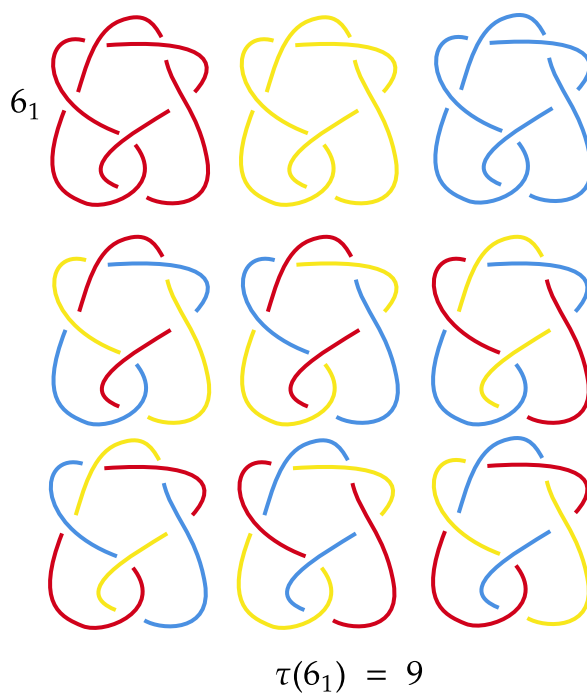


Figura 54: 3-coloreos de 6_1

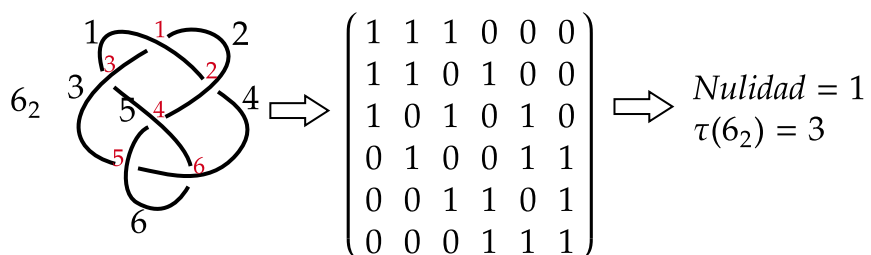


Figura 55: 3-coloreos de 6_2

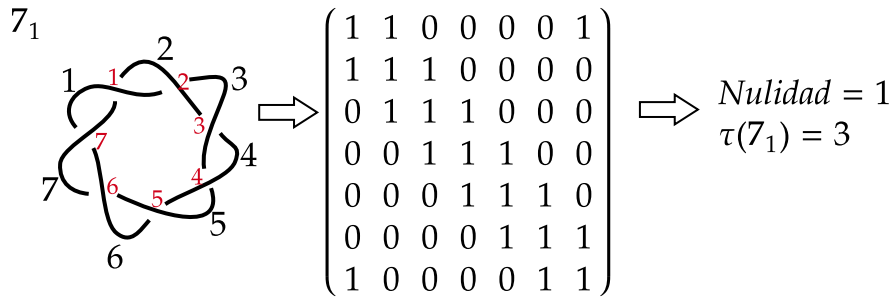


Figura 56: 3-coloreos de 7_1

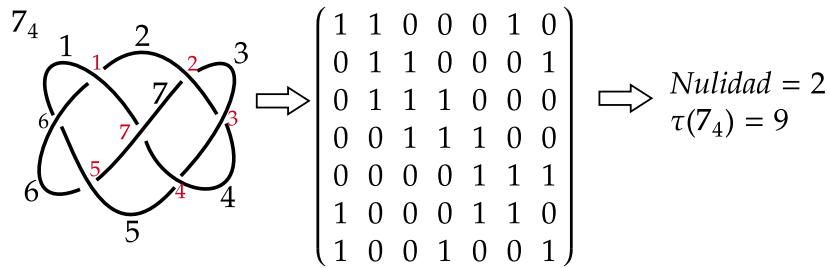


Figura 57: 3-coloreos de 7_4

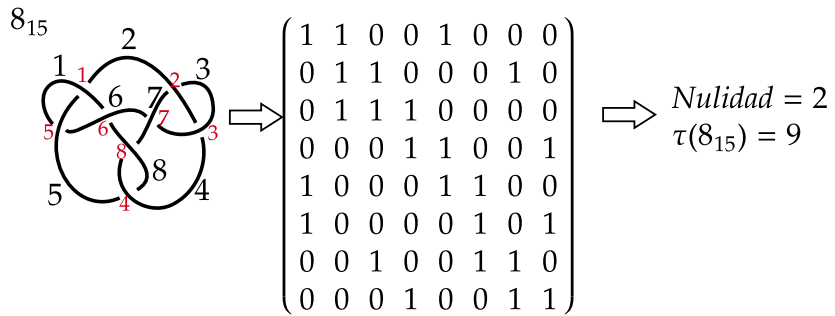


Figura 58: 3-coloreos de 8_{15}

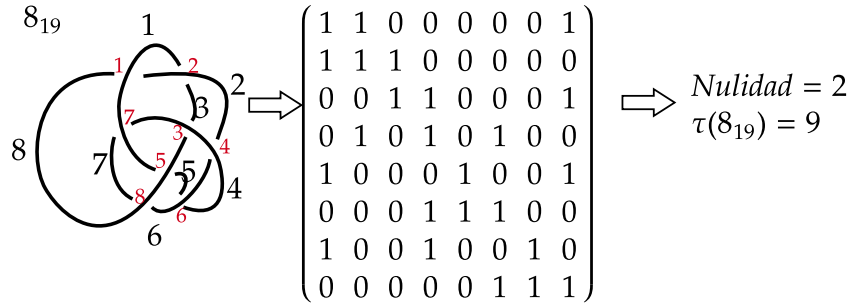


Figura 59: 3-coloreos de 8_{19}

Con esto, podemos separar los nudos en 6 conjuntos disjuntos:

■ Grupo 1:

- 3-coloreables:

$$3_1, 6_1, 7_7, 8_{20}, 8_{21}.$$

- No 3-coloreables:

$$0, 4_1, 5_2, 6_2, 6_3, 7_2, 7_6, 8_1, 8_7, 8_9, 8_{11}, 8_{13}, 8_{14}, 8_{17}.$$

■ Grupo 2:

- 3-coloreables:

$$7_4, 8_5, 8_{10}, 8_{15}, 8_{18}.$$

- No 3-coloreables:

$$5_1, 7_3, 7_5, 8_2, 8_3, 8_4, 8_6, 8_8, 8_{12}, 8_{16}.$$

■ Grupo 3:

- 3-coloreables:

$$7_1.$$




- No 3-coloreables:

$$8_{19}.$$




Así, los nudos 7_1 y 8_{19} ya están diferenciados del resto.

Para finalizar, utilizaremos el polinomio de Jones, mostrando el cálculo de algunos nudos.

5₁

L_+ :  L_- :  L_0 : 

$$t^{-1}V(5_1) - t(-t^4 + t^3 + t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(H_2)$$

$L_0 = K_+$:  K_- :  K_0 : 




$$t^{-1}V(H_2) - t(-t^{1/2} - t^{5/2}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^4 + t^3 + t)$$

$$V(H_2) = -t^{11/2} + t^{9/2} - t^{7/2} - t^{3/2}$$




$$V(5_1) = -t^7 + t^6 - t^5 + t^4 + t^2$$

Figura 60: Polinomio de Jones de 5₁

6₁

L_+ :  L_- :  L_0 : 

$$t^{-1}.1 - tV(6_1) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$$

$L_0 = K_+$:  K_- :  K_0 : 

$$t^{-1}V(L_0) - tV(H_+) = (t^{1/2} - t^{-1/2}).1$$

$$t^{-1}V(L_0) - t(-t^{5/2} - t^{1/2}) = t^{1/2} - t^{-1/2}$$

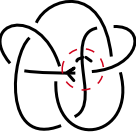
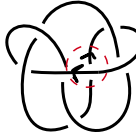
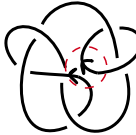
$$V(L_0) = -t^{1/2} + t^{3/2} - t^{5/2} - t^{9/2}$$

$$t^{-1} - tV(6_1) = (t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^{1/2} + t^{3/2} - t^{5/2} - t^{9/2})$$




$$V(6_1) = t^{-2} - t^{-1} + 2 - 2t + t^2 - t^3 + t^4$$

Figura 61: Polinomio de Jones de 6₁

7_7

$L_+ :$  $L_- :$  $L_0 :$ 

$$t^{-1}V(7_7) - t.1 = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$$

$K_+ :$  $L_0 = K_- :$  $K_0 :$ 

$$t^{-1}V(4_1 \sqcup 0) - tV(L_0) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(4_1)$$

$$t^{-1}(-t^{1/2} - t^{-1/2})(t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2) - tV(L_0) = (t^{1/2} - t^{-1/2})(t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2)$$

$$V(L_0) = -t^{-9/2} + t^{-7/2} - 2t^{-5/2} + 2t^{-3/2} - 2t^{-1/2} + t^{1/2} - t^{3/2}$$

$$V(7_7) = t^{-4} - 2t^{-3} + 3t^{-2} - 4t^{-1} + 4 - 3t + 3t^2 - t^3$$

Figura 62: Polinomio de Jones de 7_7

De forma análoga, podemos calcular el polinomio de Jones de los demás nudos. Todos los cálculos han sido corroborados con los presentes en “<https://knotinfo.org/index.php>”.

$$\begin{aligned}
V(4_1) &= t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2 \\
V(5_2) &= t - t^2 + 2t^3 - t^4 + t^5 - t^6 \\
V(6_2) &= t^{-1} - 1 + 2t - 2t^2 + 2t^3 - 2t^4 + t^5 \\
V(6_3) &= -t^{-3} + 2t^{-2} - 2t^{-1} + 3 - 2t + 2t^2 - t^3 \\
V(7_2) &= t - t^2 + 2t^3 - 2t^4 + 2t^5 - t^6 + t^7 - t^8 \\
V(7_3) &= t^2 - t^3 + 2t^4 - 2t^5 + 3t^6 - 2t^7 + t^8 - t^9 \\
V(7_4) &= t - 2t^2 + 3t^3 - 2t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7 - t^8 \\
V(7_5) &= t^2 - t^3 + 3t^4 - 3t^5 + 3t^6 - 3t^7 + 2t^8 - t^9 \\
V(7_6) &= t^{-1} - 2 + 3t - 3t^2 + 4t^3 - 3t^4 + 2t^5 - t^6 \\
V(8_1) &= t^{-2} - t^{-1} + 2 - 2t + 2t^2 - 2t^3 + t^4 - t^5 + t^6 \\
V(8_2) &= 1 - t + 2t^2 - 2t^3 + 3t^4 - 3t^5 + 2t^6 - 2t^7 + t^8 \\
V(8_3) &= t^{-4} - t^{-3} + 2t^{-2} - 3t^{-1} + 3 - 3t + 2t^2 - t^3 + t^4 \\
V(8_4) &= t^{-5} - 2t^{-4} + 3t^{-3} - 3t^2 + 3t^{-1} - 3 + 2t - t^2 + t^3 \\
V(8_5) &= 1 - t + 3t^2 - 3t^3 + 3t^4 - 4t^5 + 3t^6 - 2t^7 + t^8 \\
V(8_6) &= t^{-1} - 1 + 3t - 4t^2 + 4t^3 - 4t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7 \\
V(8_7) &= -t^{-6} + 2t^{-5} - 3t^{-4} + 4t^{-3} - 4t^{-2} + 4t^{-1} - 2 + 2t - t^2 \\
V(8_8) &= -t^{-5} + 2t^{-4} - 3t^{-3} + 4t^{-2} - 4t^{-1} + 5 - 3t + 2t^2 - t^3 \\
V(8_9) &= t^{-4} - 2t^{-3} + 3t^{-2} - 4t^{-1} + 5 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4 \\
V(8_{10}) &= -t^{-6} + 2t^{-5} - 4t^{-4} + 5t^{-3} - 4t^{-2} + 5t^{-1} - 3 + 2t - t^2 \\
V(8_{11}) &= t^{-1} - 2 + 4t - 4t^2 + 5t^3 - 5t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7 \\
V(8_{12}) &= t^{-4} - 2t^{-3} + 4t^{-2} - 5t^{-1} + 5 - 5t + 4t^2 - 2t^3 + t^4 \\
V(8_{13}) &= -t^{-5} + 2t^{-4} - 3t^{-3} + 5t^{-2} - 5t^{-1} + 5 - 4t + 3t^2 - t^3 \\
V(8_{14}) &= t^{-1} - 2 + 4t - 5t^2 + 6t^3 - 5t^4 + 4t^5 - 3t^6 + t^7 \\
V(8_{15}) &= t^2 - 2t^3 + 5t^4 - 5t^5 + 6t^6 - 6t^7 + 4t^8 - 3t^9 + t^{10} \\
V(8_{16}) &= -t^{-6} + 3t^{-5} - 5t^{-4} + 6t^{-3} - 6t^{-2} + 6t^{-1} - 4 + 3t - t^2 \\
V(8_{17}) &= t^{-4} - 3t^{-3} + 5t^{-2} - 6t^{-1} + 7 - 6t + 5t^2 - 3t^3 + t^4 \\
V(8_{18}) &= t^{-4} - 4t^{-3} + 6t^{-2} - 7t^{-1} + 9 - 7t + 6t^2 - 4t^3 + t^4 \\
V(8_{20}) &= -t^{-5} + t^{-4} - t^{-3} + 2t^{-2} - t^{-1} + 2 - t \\
V(8_{21}) &= 2t - 2t^2 + 3t^3 - 3t^4 + 2t^5 - 2t^6 + t^7
\end{aligned}$$

Figura 63: Polinomio de Jones de los nudos restantes

Así, analizando el polinomio de Jones obtenemos que los 36 nudos presentados son distintos dos a dos.

Por lo tanto, hemos terminado el proceso de diferenciación.

Aunque el polinomio de Jones nos permite, por sí solo, clasificar los nudos hasta 8 cruces, para nudos más grandes no es un invariante completo, por lo que idear y utilizar otros invariantes es útil en aquellos casos. La

intención el presente trabajo era mostrar el cálculo de diversos invariantes de nudos para realizar una clasificación sistemática que, a mano, solo es posible realizar para nudos con un bajo número de cruces.

6. Bibliografía

Algunas de las imágenes del presente trabajo fueron tomadas de la primer referencia.

1. Roberts, J. (2015). Knots knots. Lectures from Edinburgh Course Maths, 415.
2. C. Livingston and A. H. Moore, KnotInfo: Table of Knot Invariants, knotinfo.org, today's date (eg. August 4, 2025).

Algunas otras lecturas útiles puedes ser

1. Lickorish, W. R. (2012). An introduction to knot theory (Vol. 175). Springer Science & Business Media.
2. Przytycki, J., Bakshi, R. P., Ibarra, D., Montoya-Vega, G., & Weeks, D. (2024). Lectures in Knot Theory: An Exploration of Contemporary Topics. Springer.
3. Adams, C. C. (2004). The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots. American Mathematical Soc..

Índice de figuras

1.	Ejemplos de distintos nudos	3
2.	Representación del corte	4
3.	Representaciones del no-nudo distintas	4
4.	Un nudo salvaje formado por infinitos tréboles	5
5.	Un nudo trébol hecho con segmentos de rectas	5
6.	Representación de un Δ -movimiento	6
7.	Sección de un diagrama regular con un punto doble	7
8.	Secciones de diagramas irregulares	7
9.	Distintos enlaces	8
10.	Cambio en los cruces de D	8
11.	Trébol orientado	9
12.	Ejemplo de una suma conexas entre un trébol y un nudo ocho	9
13.	Diagramas alternante y no alternante de un nudo trébol	10
14.	Movimientos de Reidemeister	10
15.	Transformación de un nudo de tres cruces al diagrama de un trébol	11
16.	Signos para calcular el linking number	12
17.	Enlaces de Hopf	13
18.	3-coloreo en R_1	14
19.	3-coloreo en R_2	14
20.	3-coloreo en R_3	15
21.	Matriz asociada al nudo 5_2	15
22.	Matriz asociada a 5_2 reducida	16
23.	Relación de madeja del corchete de Kauffman	16
24.	Corchete de Kauffman del trébol izquierdo	18
25.	Corchete de Kauffman sobre el movimiento R_1	18
26.	Corchete de Kauffman sobre el movimiento R_2	19
27.	Corchete de Kauffman sobre el movimiento R_3	19
28.	Writhe sobre el movimiento R_1	19
29.	Suavizado de cruces	20
30.	Aplicaciones sucesivas de la relación de madeja al nudo trébol	21
31.	Diagramas locales de L_+, L_-, L_0	22
32.	Diagramas locales de D_+, D_-, D_0, D_∞	23
33.	Diagramas para calcular la relación de madeja de Jones en el no-enlace	23
34.	Diagramas para eliminar círculos disjuntos	24
35.	Diagramas para el enlace Hopf positivo	24
36.	Tabla de nudos hasta 8 cruces	25
37.	Unknotting number de 3_1	25
38.	Unknotting number de 4_1	25
39.	Unknotting number de 5_1	26
40.	Unknotting number de 5_2	26

41.	Unknotting number de 6_1	26
42.	Unknotting number de 7_1	27
43.	Unknotting number de 7_2	27
44.	Unknotting number de 7_3	27
45.	Unknotting number de 8_1	28
46.	Unknotting number de 8_3	28
47.	Unknotting number de 8_9	28
48.	Unknotting number de 8_{15}	29
49.	Unknotting number de 8_{19}	29
50.	3-coloreos de 3_1	30
51.	3-coloreos de 4_1	30
52.	3-coloreos de 5_1	31
53.	3-coloreos de 5_2	31
54.	3-coloreos de 6_1	32
55.	3-coloreos de 6_2	32
56.	3-coloreos de 7_1	33
57.	3-coloreos de 7_4	33
58.	3-coloreos de 8_{15}	33
59.	3-coloreos de 8_{19}	34
60.	Polinomio de Jones de 5_1	35
61.	Polinomio de Jones de 6_1	35
62.	Polinomio de Jones de 7_7	36
63.	Polinomio de Jones de los nudos restantes	37