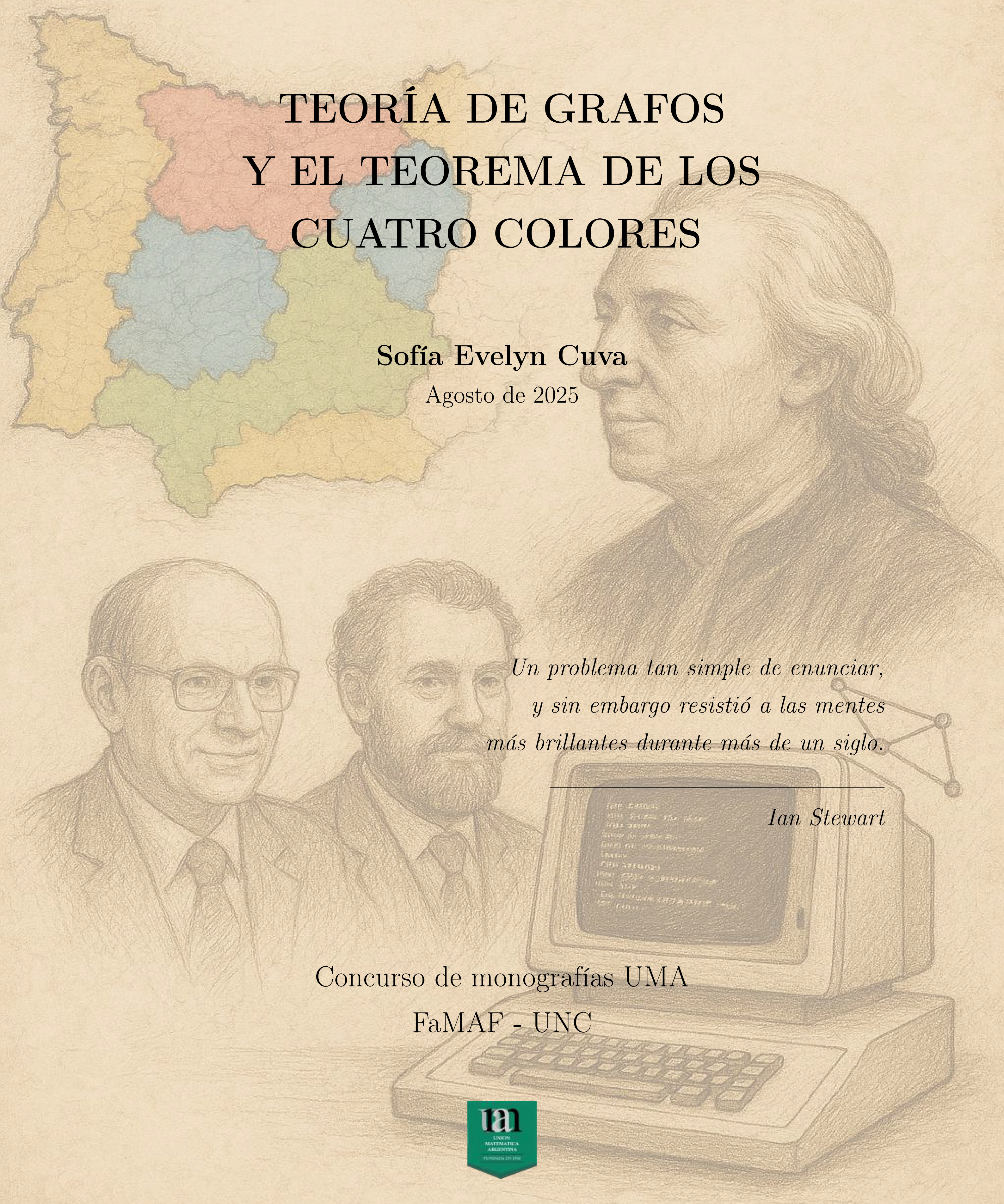

TEORÍA DE GRAFOS Y EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES

Sofía Evelyn Cuva

Agosto de 2025

Un problema tan simple de enunciar,
y sin embargo resistió a las mentes
más brillantes durante más de un siglo.

Ian Stewart

Concurso de monografías UMA

FaMAF - UNC

Resumen

Pensemos en un mapa. Puede ser de una región real o ficticia, simplemente un plano dividido en regiones que comparten líneas fronterizas. Ahora, si queremos colorearlo de manera tal que no existan dos regiones limítrofes pintadas del mismo color, se sabe que tres colores no siempre alcanzan para ello. Sin embargo, el *teorema de los cuatro colores* afirma que cuatro colores siempre son suficientes.

En este trabajo pretendo reunir los aspectos teóricos y técnicos —la teoría de grafos y el uso de las computadoras— así como también históricos del teorema, pasando por los orígenes de la teoría de grafos, la primera referencia escrita del problema, las pruebas fallidas y, finalmente, la prueba definitiva en 1976 con la ayuda de las computadoras.

Prefacio

Cuando comencé a investigar sobre este tema, una de las primeras cosas que me llamó la atención fue lo simple que era el enunciado del problema, al punto de que cualquier persona puede entenderlo sin ningún tipo de inconveniente.

A su vez, la historia alrededor del teorema —que durante muchos años fue una conjetura— es sumamente rica y cuenta con muchos personajes involucrados cuyas contribuciones ayudaron al desarrollo de la demostración y de la teoría de grafos en general. En contraposición a la sencillez con la que se enuncia, la prueba de la conjetura no fue para nada trivial y tomó más de un siglo en poder ser completada. Este es uno de los aspectos que también me pareció bastante interesante.

Si bien el lograr reunir toda la información y organizarla de una forma que me gustara fue un trabajo que me tomó bastante tiempo, la experiencia fue increíble y estoy muy contenta con el resultado.

Por último, no quiero dejar pasar la oportunidad para agradecer a todas las personas que me apoyaron durante el proceso:

A Aaron, gracias por siempre estar pendiente y por ayudarme a mejorar con tus ideas y sugerencias en todo momento.

A mis amigos, que me leyeron y dieron sus opiniones para que todo sea perfecto.

A Juan Pablo Rossetti, por compartirme sus opiniones y sugerencias para poder mejorar y perfeccionar este trabajo.

Y a mi familia, los que siempre están *al pie del cañón*.

Espero que puedan disfrutar de leer esta monografía tanto como yo disfruté escribiéndola.

Índice

1. Introducción

Informalmente, podemos definir un grafo como un conjunto de puntos (llamados *vértices*) en el plano unidos por curvas o rectas (llamadas *aristas*). Con esta noción en mente, podemos decir que la historia de la teoría de grafos se remonta específicamente a 1736, cuando el matemático suizo Leonhard Euler resolvió el problema de los puentes de Königsberg. Este era un antiguo acertijo que planteaba la posibilidad de encontrar un camino que cruzara cada uno de los siete puentes que conectaban la ciudad, pero sin cruzar ningún puente dos veces. Euler logró probar que no podía existir tal camino y en su demostración sólo hizo referencia a la disposición física de los puentes, dado que lo único que importaba era cómo estaban conectadas las islas.

De esta forma, la historia de la teoría de grafos y de la topología están estrechamente relacionadas, siendo la topología la rama de la matemática dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas. Una de las nociones más importantes en topología es la idea de "conexidad", lo cual es muy importante también en teoría de grafos, y así ambas áreas comparten muchos problemas y técnicas comunes.

Euler se refirió a su trabajo sobre el problema de los puentes de Königsberg como un ejemplo de *geometria situs*, la "geometría de la posición"[1] y, en 1750, probó su famosa fórmula para los poliedros:

$$C - A + V = 2.$$

donde C, A y V denotan el número de caras, aristas y vértices; respectivamente.

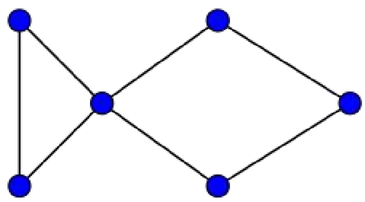

Figura 1: Ejemplo de un grafo con $C = 3, A = 7$ y $V = 6$. Se comprueba fácilmente que vale la fórmula de Euler.

Los vértices y las aristas de un poliedro forman un grafo en su superficie, y esta noción llevó entonces a la consideración de grafos en otras superficies, como por ejemplo un toro. Así la fórmula de Euler pronto se generalizó para superficies orientables de la siguiente manera:

$$C - A + V = 2 - 2g$$

[1]Hasta el siglo XVIII, los problemas matemáticos habían estado vinculados a la idea de medida, magnitud o distancia. Sin embargo, luego se empezaron a plantear problemas en los que estos aspectos dejaban de tener importancia y los primeros matemáticos en tratarlos le dieron el nombre de *Geometría situs* o *Analysis situs*; que significa *Geometría de la situación* ó *Análisis de la posición*.

donde g denota el género de la superficie, lo que informalmente podemos definir como la cantidad de "agujeros" de la misma.

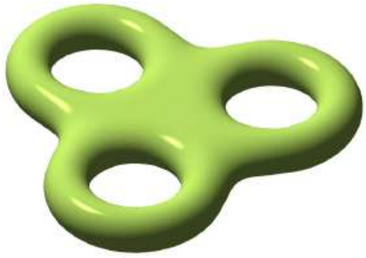

Figura 2: Una superficie con $g = 3$.

Luego, esta conexión entre la teoría de grafos y la topología llevó a un subcampo llamado *teoría topológica de grafos*. Una cuestión importante dentro de esta área es el problema del coloreo de mapas, el cual surge del conocido problema de los cuatro colores. Hablaremos de esto con más detalle en las próximas secciones, pero básicamente este pregunta si es posible colorear los países en cualquier mapa utilizando sólo cuatro colores y de manera tal que los países que comparten una frontera tengan colores diferentes. Planteado originalmente en la década de 1850 por Francis Guthrie, este problema tiene una rica historia llena de intentos fallidos por dar una solución. En una forma equivalente en teoría de grafos, esto se traduce en preguntar si los vértices de un grafo planar siempre pueden ser coloreados usando solo cuatro colores, de manera tal que los vértices conectados por una misma arista tengan colores diferentes.

El resultado fue finalmente demostrado en 1976 mediante la comprobación computarizada de casi 2.000 configuraciones especiales. Curiosamente, el problema correspondiente sobre el número de colores necesarios para colorear mapas en superficies de género superior fue completamente resuelto unos años antes. De hecho, en 1968 Gerhard Ringel y Ted Youngs probaron que para toda superficie orientable sin borde y de género $g > 0$, o toda superficie sin borde no orientable —distinta de la botella de Klein— el número de colores necesarios está dado por la parte entera de

$$\frac{1}{2}(7 + (48g + 1)^{\frac{1}{2}}).$$

Por mencionar algunos ejemplos, podemos notar que los mapas tóricos requieren de 7 colores, y un doble toro requiere de 8. Por último, se demostró también que la cinta de Möbius —una superficie no orientable con borde— requiere de 6, al igual que la botella de Klein, como demostró en 1986 Thomas L. Saaty.

Entre los intereses actuales de la teoría de grafos se encuentran los problemas relacionados con algoritmos eficientes para encontrar caminos óptimos en grafos. Dos ejemplos bien conocidos son el problema del cartero chino, que fue resuelto en la década de 1960, y el problema del viajante de comercio, que sigue atrayendo la atención de muchos investigadores debido a sus aplicaciones en la ruta de datos, productos y personas. El trabajo en estos problemas está relacionado con el campo de la programación lineal, que fue fundado a mediados del siglo XX por el matemático estadounidense George Dantzig.

2. Orígenes y desarrollo de la teoría de grafos

En esta sección ampliaremos algunas de las cuestiones mencionadas en la introducción, iniciando con el trabajo pionero de Leonhard Euler, el desarrollo de la teoría a lo largo de los siglos XIX y XX y su utilidad en distintos ámbitos de la actualidad.

2.1. Motivación

La teoría de grafos es una de las áreas de la matemática cuyo desarrollo ha estado siempre motivado por sus aplicaciones. Como ya mencionamos, el primer artículo conocido sobre el tema fue escrito por Euler y publicado en 1736 para dar solución al famoso problema de los puentes de Königsberg. A partir de entonces, muchos matemáticos importantes han realizado sus contribuciones: en los siglos XVIII y XIX podemos mencionar a Vandermonde, Cauchy, Cayley, Hamilton y Kempe; entre otros.

De esta forma, desde sus orígenes, la teoría de grafos se utilizó para la resolución de juegos matemáticos, para el estudio de circuitos eléctricos y en diversas aplicaciones en campos muy variados como economía, física teórica, psicología, lingüística y antropología; entre muchos otros. Además, posee una estrecha relación con otros campos de la matemática como la topología, la teoría de grupos, la teoría de conjuntos y la combinatoria. [19]

2.2. Euler: pionero en la teoría de grafos

2.2.1. Leonhard Paul Euler

Leonhard Euler fue el escritor de matemáticas más prolífico de todos los tiempos. Nacido el 15 de abril de 1707 en Basilea, hizo grandes avances en el estudio de la geometría analítica moderna y la trigonometría, además de realizar contribuciones al álgebra, el cálculo y la teoría de números.

Euler estudió además el problema de los tres cuerpos, elasticidad, acústica, la teoría ondulatoria de la luz, hidráulica y música; y con sus trabajos sentó las bases de la mecánica analítica.

Más aún, es a él a quien le debemos gran parte de la notación que utilizamos hoy en día. [12]

En el campo de la teoría de grafos, su principal contribución fue la resolución del problema de los puentes de Königsberg, que explicaremos a continuación.

Figura 3

2.2.2. Los puentes de Königsberg

Luego de su fundación en 1254 y gracias a su posición estratégica en torno al río Pregel, la ciudad de Königsberg se convirtió rápidamente en una rica metrópoli. En el río alrededor de la isla Kneiphof, que se encuentra en el centro de la ciudad, se construyeron siete puentes que comunicaban las cuatro regiones en las que quedaba dividida la urbe y así, los habitantes de Königsberg solían entretenerse tratando de encontrar un camino alrededor de la ciudad por el cual se cruzara cada uno de los puentes una sola vez. [5]

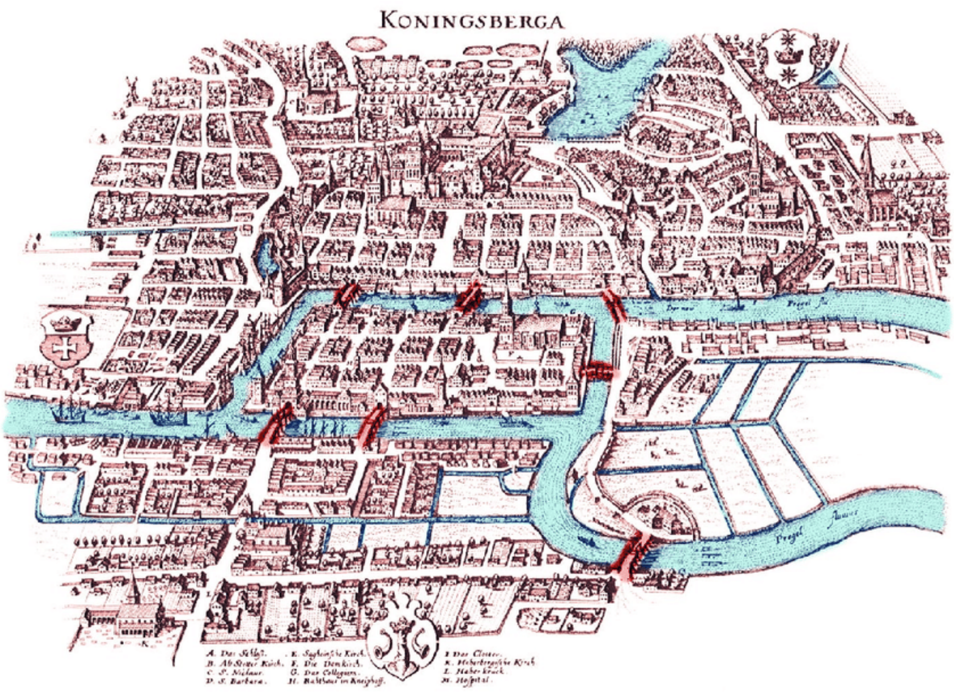

Figura 4: Mapa de la ciudad de Königsberg en la época de Euler.

Todos los intentos por encontrar una ruta con esas características fracasaban, con lo cual comenzó a creerse que la tarea era imposible, pero no fue hasta la década de 1730 que el problema fue tratado desde un punto de vista matemático y la imposibilidad de encontrar tal ruta fue probada. El encargado de dicha prueba fue nada más ni nada menos que Leonhard Euler, quien les habló a otros matemáticos sobre el problema y publicó, en 1736, un artículo titulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, donde presentaba una solución al problema, la cual era en realidad una generalización del problema de los puentes para cualquier situación similar.

La clave de la demostración de Euler fue el realizar una abstracción gráfica del mapa, reduciendo las zonas de tierra a puntos (en lenguaje de grafos, vértices) y los puentes a líneas (en lenguaje de grafos, aristas) y así el problema era equivalente a recorrer el siguiente gráfico con un lápiz sin levantarlo del papel, de manera que se empiece en un punto y se regrese a él recorriendo cada camino una sola vez.

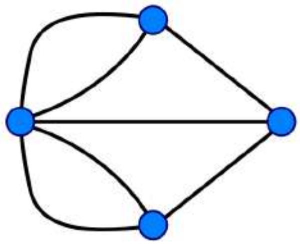

Figura 5: Simplificación del mapa de la ciudad. Los puntos representan las regiones y las curvas los puentes.

Luego, Euler distinguió dos tipos de caminos: un trayecto abierto, que empieza y termina en vértices diferentes; y un trayecto cerrado, que empieza y termina en el mismo vértice. Demostró que para este diagrama en particular no existía ninguno de los dos trayectos y para eso consideró la valencia[2] de cada uno de los vértices. Así, si hubiese existido un trayecto cerrado, Euler llegó a la conclusión de que todos los vértices deberían tener valencia par, pero en este diagrama tenemos un vértice con valencia cinco y el resto con valencia tres, por lo tanto no podía existir dicho trayecto. Si en cambio hubiese existido un trayecto abierto, entonces habría exactamente dos vértices con valencia impar, pero en el diagrama los vértices de valencia impar son cuatro (y son todos) con lo cual tampoco podría existir un trayecto abierto.

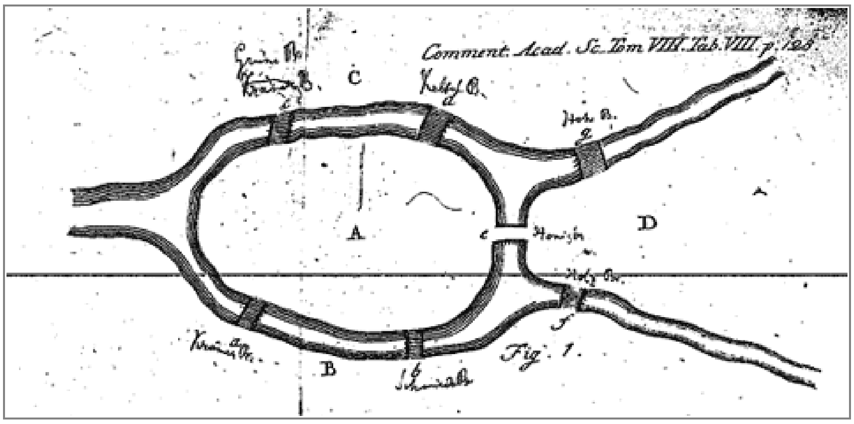

Figura 6: Dibujo del artículo de 1736 donde se desarrolla la abstracción del mapa de Königsberg. Esta imagen muestra el primer grafo de la historia.

Finalmente, Euler profundizó un poco más y demostró también que estas condiciones necesarias para la existencia de un trayecto son también suficientes siempre y cuando el diagrama sea conexo, o sea siempre que podamos ir de un vértice cualquiera a otro, pasando por una o más aristas.

[2]Definiremos *valencia de un vértice* en la próxima sección, pero básicamente es la cantidad de curvas o *aristas* que inciden sobre él. *Valencia* y *grado* son términos equivalentes.

2.3. Problemas de rutas y algunas cuestiones más recientes

Una de las utilidades más importantes de la teoría de grafos se ve en los problemas de rutas. Estos son problemas de optimización combinatoria, que consisten en encontrar la solución óptima entre un número finito o infinito numerable de soluciones. Estos problemas se suelen plantear como la búsqueda de la ruta óptima que atraviesa las aristas de un grafo dado.

La motivación para la búsqueda de esta ruta suele plantearse como una serie de clientes que demandan un servicio y necesitamos la ruta más corta para satisfacer dicha demanda. La importancia de estos problemas se debe a la gran cantidad de casos reales en los que se pueden aplicar, tales como repartos de mercaderías, recolección de basura, transporte de pasajeros o la limpieza de las calles; pero no solo en la logística y distribución, sino también en otras situaciones como la producción de circuitos electrónicos integrados o la organización de tareas.

Asimismo, debemos tener cuidado de no confundir los problemas de rutas con los problemas de caminos. En estos últimos sólo nos interesa escoger el camino óptimo que une dos vértices; sin embargo en los problemas de rutas nos interesa construir un ciclo (que será nuestra ruta) tal que recorra ciertos vértices. De todas formas, estos problemas están relacionados y muchas veces tendremos que resolver un problema de caminos para poder resolver uno de rutas.

El acertijo de los puentes de Königsberg es el primer ejemplo conocido de este tipo de problemas, y a lo largo de los años aparecieron algunos más que fueron tratados durante el siglo XIX.

2.3.1. The icosian game

Otra de las primeras referencias sobre los problemas de rutas por vértices data de 1857, cuando el irlandés William Rowan Hamilton inventó el Icosian Game, un juego que consistía en recorrer los veinte puntos de un tablero y volver al punto de origen. En el fondo, el objetivo del juego era encontrar un ciclo que recorra una y solo una vez todos los vértices del grafo formado por las aristas de un icosaedro. De hecho, por este juego se denominó a este tipo de ciclos como *ciclos hamiltonianos*. Debemos tener en cuenta que, dado que las aristas no tenían costes asociados, el juego pretendía encontrar un ciclo, no el ciclo óptimo.

Figura 7: Una de las presentaciones del tablero de juego.

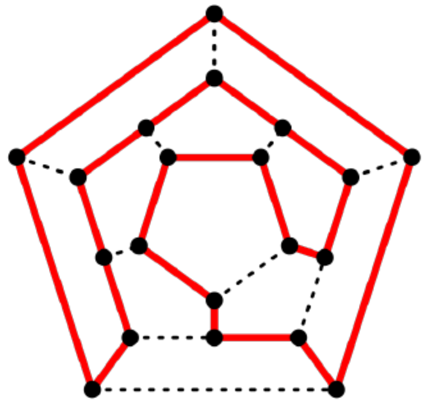

Figura 8: Una posible solución.

2.3.2. El problema del cartero chino (CPP)

Formulado originalmente en 1960 por el matemático chino Kwan Mei-Ko en un artículo de un diario —y traducido al inglés en 1962— se plantea el problema al que se enfrenta un cartero para repartir la correspondencia recorriendo la menor distancia posible. Matemáticamente, esto consiste en encontrar el camino o circuito cerrado más corto que visite cada arista de un grafo al menos una vez. Cuando el grafo tiene un circuito euleriano (esto es, un recorrido cerrado que cubre cada arista exactamente una vez), ese circuito es una solución óptima. En caso contrario, se tiene un algoritmo para construir una solución.

- **Algoritmo de resolución.** El algoritmo clásico para resolver el CPP consta de los siguientes pasos:

  1. Identificar los vértices de grado impar.
  2. Formar pares de esos vértices y buscar la forma de unirlos de manera tal que el recorrido sea el más corto posible.
  3. Duplicar las aristas de los caminos hallados, para obtener un grafo euleriano.
  4. Encontrar un circuito de Euler en el grafo modificado.

  El resultado es un recorrido cerrado de longitud mínima que recorre todas las aristas del grafo original al menos una vez.

- **Aplicaciones y variantes** Este problema tiene aplicaciones en planificación de rutas para vehículos de limpieza, inspección, reparto postal, y mantenimiento de redes. También existen variantes como:

  - El CPP en grafos dirigidos.
  - El CPP mixto.

- El CPP en multigrafos.

Cada una de estas versiones introduce nuevas complejidades computacionales. Para más detalles se puede consultar [7].

2.3.3. El problema del viajante de comercio (TSP)

El problema del viajante de comercio es uno de los problemas más estudiados en la teoría de la computación, la investigación operativa y la matemática aplicada. Consiste en encontrar la ruta más corta que permite a un viajante visitar una serie de ciudades exactamente una vez y regresar a la ciudad de origen.

A diferencia del problema del cartero chino, que se enfoca en cubrir aristas, el TSP busca cubrir vértices optimizando el recorrido.

Así, se considera un grafo en donde cada vértice representa una ciudad y cada arista tiene un peso que representa la distancia o el costo de viajar entre dos ciudades. El objetivo es encontrar un ciclo hamiltoniano (o sea, un camino que recorre cada vértice una sola vez) de peso mínimo.

- **Dificultad computacional.** Hasta el momento, no existe una forma rápida de resolverlo en todos los casos, especialmente cuando el número de ciudades es muy grande. Por lo tanto, en lugar de buscar siempre la mejor solución, muchas veces se usan métodos aproximados o trucos inteligentes que dan soluciones muy buenas, aunque no garanticen que sean las óptimas.

- **Aplicaciones.** El TSP se aplica a numerosos problemas prácticos:

  - Logística y planificación de rutas.
  - Ensamblaje de ADN en bioinformática.
  - Fabricación y control de maquinaria.
  - Diseño de circuitos integrados.

  También funciona como problema modelo para estudiar nuevas técnicas de optimización combinatoria. Para más detalles se puede consultar [6].

3. Teoría de grafos

Ahora nos encargaremos de formalizar algunas de las nociones que mencionamos en las secciones anteriores y daremos algunos contenidos teóricos sobre grafos: definiciones, teoremas y resultados importantes. Para más detalles se pueden consultar [8] y [18].

Definición 3.1. Sea $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Definimos $\mathcal{P}$ como

$$\mathcal{P} = \Big\{ \{(v,w)\} : v, w \in \mathcal{V}, v \neq w \Big\}.$$

Luego, un *grafo* es un conjunto de *vértices* $\mathcal{V}$ y de *aristas* $\mathcal{A}$, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$.

Ejemplo 3.1. Consideremos $\mathcal{V} = \{a,b,c,d,z\}$ y $\mathcal{A} = \{\{a,b\},\{a,d\},\{b,z\},\{c,d\},\{d,z\}\}$. Entonces el par $(\mathcal{V},\mathcal{A})$ es un grafo.

Definición 3.2. Dos vértices v y w de un grafo se dicen *adyacentes* si $\{v,w\}$ es una arista del grafo.

Los grafos suelen representarse gráficamente de la siguiente manera: a cada elemento de $\mathcal{V}$ le corresponde un punto del plano, y a cada arista de $\mathcal{A}$ le corresponde un arco o segmento que une los dos vértices de dicha arista.

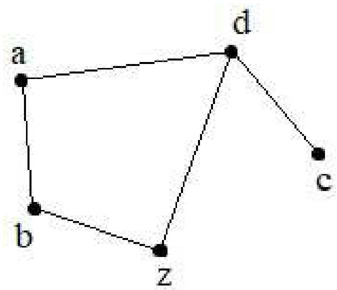

Figura 9: El grafo del Ejemplo 3.1 se puede representar de esta manera.

Otra forma de representar un grafo es por medio de una *lista de adyacencia.* Esta lista consiste de una tabla en la cual se listan para cada vértice todos los vértices adyacentes a él.

Vértices				
a	b	c	d	z
b	a	d	a	b
d	z		c	d
			z	

Cuadro 1: Lista de adyacencia para el grafo del Ejemplo 3.1.

Definición 3.3. Un *subgrafo* de un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ es un grafo $H = (\mathcal{V}', \mathcal{A}')$ tal que $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ y $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$.

Definición 3.4. A continuación algunas definiciones importantes:

En un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, al número de vértices adyacentes a un vértice v se lo denomina *valencia* ó *grado* de v y se lo denota como $\delta(v)$. Esto es,

$$\delta(v) = \Big|\{w \in \mathcal{V} : \{v, w\} \in \mathcal{A}\}\Big|$$

Un vértice se dice *par* ó *impar* según que $\delta(v)$ sea par o impar respectivamente.

Un grafo G se dice *regular de grado* r si todos los vértices tienen la misma valencia r, o sea $\delta(v) = r$ para todo vértice v.

Un grafo G se dice *completo* si cada par de vértices forma una arista.

Un grafo G se dice *plano* si las aristas no se intersecan.

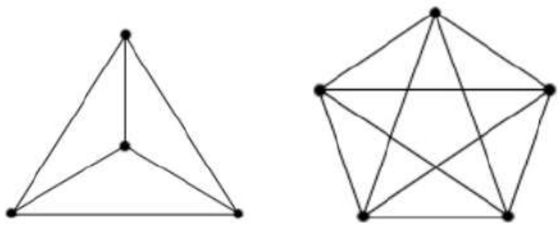

Figura 10: Ejemplos de un grafo plano (izquierda) y uno no plano (derecha).

Teorema 3.1. *En un grafo G, la suma de las valencias de los vértices es igual al doble del número de aristas, i.e.*

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} \delta(v) = 2|\mathcal{A}| \tag{1}$$

Demostración. Notemos que el número de aristas a las cuales pertenece un vértice v es igual a la valencia de v. Por lo tanto, si sumamos todas las valencias de todos los vértices, habremos contado cada arista $\{v, w\}$ dos veces, en un caso al contar las aristas a las que v pertenece y en otro caso a las que w pertenece. □

Corolario 3.2. *En un grafo, el número de vértices impares es par.*

Demostración. Notemos que el miembro de la izquierda en (1) puede escribirse como

$$\sum_{\delta(v) \text{ es par}} \delta(v) + \sum_{\delta(v) \text{ es impar}} \delta(v)$$

Ahora bien, la sumatoria del primer sumando es una suma de números pares, y por lo tanto da como resultado un número par. La segunda sumatoria es una suma de números impares, cuyo resultado es par puesto que el miembro derecho de (1) es par. Eso puede ser posible únicamente si el número de términos de dicha suma es par, esto es, si el número de vértices impares es par.

□

Definición 3.5. Dos grafos $G_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{A}_1)$ y $G_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{A}_2)$ se dicen *isomorfos* si existe una biyección $\alpha : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ que induce una biyección entre $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, esto es:

$$\{v, w\} \in \mathcal{A}_1 \Longleftrightarrow \{\alpha(v), \alpha(w)\} \in \mathcal{A}_2.$$

Proposición 3.3. *Si $G_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{A}_1)$ y $G_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{A}_2)$ son grafos isomorfos entonces:*

1. $|\mathcal{V}_1| = |\mathcal{V}_2|$
2. *Para todo entero $k \geq 0$, si $n_i(k) = \{v \in \mathcal{V}_i : \delta(v) = k\}$ con $i = 1, 2$ entonces $n_1(k) = n_2(k)$.*

3.1. Caminatas, caminos y ciclos

Definición 3.6. Dado $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un grafo, entonces:

Una *caminata* en G de longitud $k \geq 1$ es una sucesión de vértices $v_1, v_2, \cdots, v_{k+1}$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in \mathcal{A}$ $\forall 1 \leq i \leq k$.

Un *camino* es una caminata en la que todos los vértices son distintos.

Una caminata de longitud $k > 2$ cuyos vértices son todos distintos excepto $v_1 = v_{k+1}$ se llama *ciclo* ó *k-ciclo*.

Luego, G se dice *conexo* si $\forall v, w \in \mathcal{V}$ existe una caminata o camino que los une. En tal caso, escribimos $v \sim w$. Así, $\sim$ define una relación de equivalencia en $\mathcal{V}$ y lo parte en clases de equivalencias que llamamos *componentes conexas* de G. Luego, G es conexo si posee una única componente conexa. Además, decimos que una arista es un *puente* si al excluirla aumenta el número de componentes conexas.

Definición 3.7. Dado $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un grafo, entonces:

Un *ciclo hamiltoniano* es un ciclo que contiene a todos los vértices del grafo.

Una *caminata euleriana* es una caminata que usa todas las aristas de G exactamente una vez.

Una caminata euleriana que comienza y termina en un mismo vértice es un *circuito euleriano.*

Teorema 3.4. *Un grafo conexo con más de un vértice posee una caminata euleriana de v a w si y sólo si v y w son los únicos vértices de grado impar. Por otro lado, un grafo conexo con más de un vértice tiene un circuito euleriano si y sólo si todos los vértices tienen grado par.*

3.2. Árboles y bosques

Definición 3.8. Un *árbol* es un grafo conexo que no contiene ciclos; y un *bosque* es un grafo que no contiene ciclos.

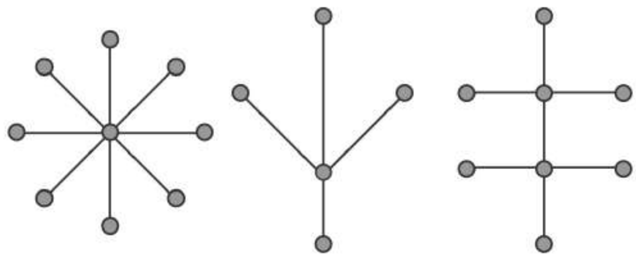

Figura 11: Ejemplos de árboles.

Observación 3.1. Notar que si G es un bosque conexo, entonces es un árbol.

Teorema 3.5. *Sea $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un árbol. Si $|\mathcal{V}| \geq 2$ entonces:*

1. *Para todo par v, w de vértices hay un único camino que va de v a w.*
2. *El grafo que se obtiene de quitar cualquier arista posee exactamente dos componentes conexas.*
3. $|\mathcal{A}| = |\mathcal{V}| - 1$.

Corolario 3.6. *En un árbol T con dos o más vértices, existen al menos dos vértices de valencia 1.*

Teorema 3.7 (Fórmula de Euler)**.** *Para cualquier grafo conexo y plano G, se tiene que:*

$$V - A + C = 2$$

donde $V = |\mathcal{V}|$, $A = |\mathcal{A}|$ y C es el número de caras, o sea, el número de regiones, contando la región exterior.

Demostración. Lo hacemos por inducción en el número de aristas en el grafo.

- **Caso base:** Si $A = 0$ entonces el grafo consiste de un solo vértice y una sola cara, de donde $1 - 0 + 1 = 2$ y entonces listo.

- **Paso inductivo:** Suponemos que vale para grafos de hasta n aristas. Veamos que vale para grafos con $n+1$ aristas.
  - **Caso 1:** Si G no contiene ciclos, entonces es un árbol. Luego, $C = 1$ y por el Teorema 3.5 se tiene $V - V + 1 + 1 = 2$ y por lo tanto vale la fórmula de Euler.
  - **Caso 2:** Si G contiene al menos un ciclo, tomamos una arista a del ciclo y la removemos, obteniendo un nuevo grafo G'. Dado que el ciclo divide el plano en dos caras, las caras a cada lado de a deben ser distintas. Al eliminar la arista a, fusionamos estas dos caras. Por lo tanto, G' tiene una cara menos que G. Dado que G' tiene n aristas, por hipótesis inductiva vale la fórmula de Euler, esto es
  $$V' - A' + C' = 2.$$
  Pero $V' = V$, $A' = A - 1$ y $C' = C - 1$. Reemplazando, obtenemos que:
  $$V - A + 1 + C - 1 = 2$$
  o sea,
  $$V - A + C = 2$$
  y entonces listo.

□

Corolario 3.8. *En un grafo plano, simple y conexo, vale que* $A \leq 3V - 6$.

Teorema 3.9. *Todo grafo plano, simple y conexo contiene un vértice* v *tal que* $\delta(v) \leq 5$.

3.3. Coloración de grafos

Definición 3.9. Sea $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un grafo. Una *coloración con k colores* en G es una función
$$c : \mathcal{V} \to \mathbb{N}_k$$
tal que si $\{x, y\} \in \mathcal{A}$ entonces $c(x) \neq c(y)$. El *número cromático* de G, denotado $\chi(G)$, es el menor entero k tal que G admite una coloración con k colores.

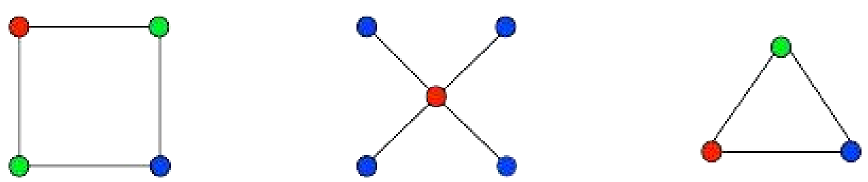

Figura 12: Ejemplo de coloración de grafos.

Algoritmo greedy. Este algoritmo consiste en asignar un color a cada vértice, de modo que cada vértice recibe el primer color que no esté asignado a sus adyacentes. En primer lugar, se ordenan los vértices del grafo de alguna manera:

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

y se dispone del conjunto de colores $\{1, 2, \cdots\}$. Se asigna a v_1 el color 1:

$$v_1 \mapsto 1.$$

Luego, para cada $2 \leq i \leq n$ consideramos el conjunto:

$$\mathcal{S} = \{\text{colores utilizados en los vértices } v_j, 1 \leq j < i \text{ que son adyacentes a } v_i\}$$

y asignamos a v_i el primer color que no pertenece a $\mathcal{S}$.

La coloración obtenida con el algoritmo greedy depende del orden que se le de a los vértices, y normalmente el número de colores que usará el algoritmo será mayor que el mínimo posible, o sea, mayor que $\chi(G)$. Sin embargo, puede probarse que existe un orden en los vértices tal que el algoritmo greedy da exactamente el número cromático $\chi(G)$.

Teorema 3.10. *Si G es un grafo con valencia máxima k, entonces $\chi(G) \leq k + 1$.*

Demostración. Sean $v_1, \cdots, v_n$ un orden de vértices. Cada vértice v_i tiene a lo sumo k vértices adyacentes. Por lo tanto, dados $k + 1$ colores, al menos uno de ellos no está asignado a ningún vecino de v_i, y por lo tanto puede asignársele. □

Definición 3.10. Un grafo *bipartito* es un grafo G tal que el conjunto de vértices $\mathcal{V}$ es unión de dos conjuntos disjuntos: $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$; y tal que toda arista de G une un vértice de $\mathcal{V}_1$ con un vértice de $\mathcal{V}_2$.

Teorema 3.11. *Sea G un grafo con al menos una arista. Entonces son equivalentes:*

1. *G es bipartito.*
2. *$\chi(G) = 2$.*
3. *G no posee ciclos de longitud impar.*

Corolario 3.12. *Un grafo bipartito con un número impar de vértices no puede contener un ciclo hamiltoniano.*

4. El problema de los cuatro colores

Existen pocos problemas sin resolver en matemática que pueden ser comprendidos por personas que no sean matemáticos profesionales. El problema de los cuatro colores fue uno de ellos y desafió a muchos a encontrar una solución durante más de cien años antes de ser resuelto. Durante este tiempo, se convirtió en uno de los problemas matemáticos sin resolver más conocidos y muchos grandes matemáticos del siglo XX han trabajado seriamente en él, mientras que casi todos los matemáticos le han dedicado al menos algunas reflexiones superficiales. Su gran atractivo reside en la engañosa simplicidad de su planteamiento. [2]

4.1. Preliminares

Antes de profundizar en el problema en sí, vamos a familiarizarnos con la noción de mapa que vamos a considerar.

Definición 4.1. Un *mapa* es un plano dividido en varias regiones separadas por líneas fronterizas. Diremos que dos regiones son *adyacentes*[3] si comparten una línea fronteriza.

Es importante aclarar que no consideramos como frontera a un solo punto, o sea, si las regiones se tocan sólo en un punto, no las consideraremos adyacentes; como se muestra a continuación.

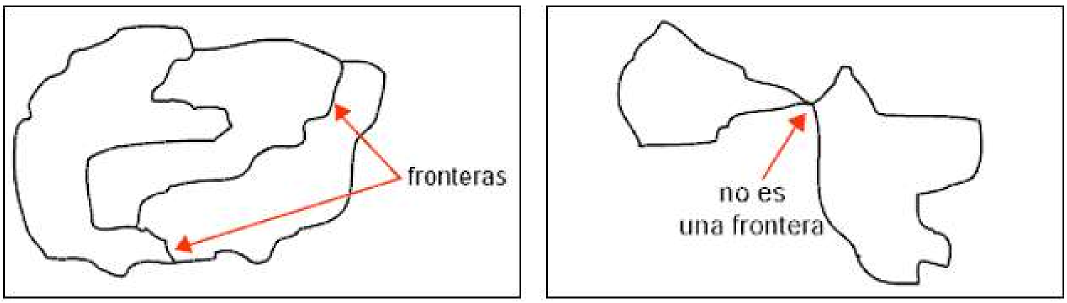

Figura 13

Definición 4.2. Se dice que un mapa es *regular* si es conexo (o sea, no hay "islas"), no contiene puentes y dos países distintos tienen como máximo una frontera común.

Más aún, vamos a restringirnos al caso de mapas sin países no conexos, pues en ese caso podríamos tener mapas que no fueran posibles de colorear con sólo cuatro colores.

[3] Algunas veces utilizaré la palabra "limítrofes" como sinónimo.

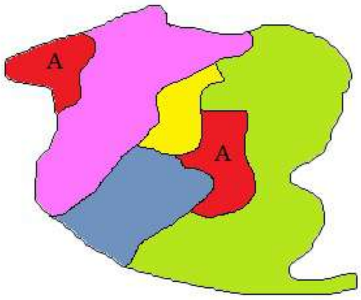

Figura 14: Un mapa con un país A no conexo requiere cinco colores.

Observación 4.1. Por último, y dado que durante este capítulo utilizaremos las nociones de grafo y mapa de forma indistinta, me parece útil dejar explícita la asignación que haremos a partir de un mapa arbitrario. Así, para traducir un mapa al lenguaje de grafos, simplemente representamos cada región mediante un punto (vértice), y trazamos una arista entre dos puntos si las regiones correspondientes son limítrofes. La siguiente imagen ejemplifica esta correspondencia:

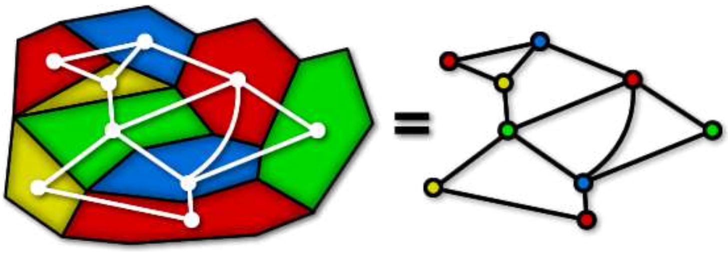

Figura 15: Ejemplo de la correspondencia mapa-grafo.

Notar además que entonces el coloreo de mapas se traduce directamente a un problema de coloración de grafos, lo cual estudiamos en el capítulo anterior.

4.2. Los orígenes

La primera referencia escrita sobre el problema de los cuatro colores se halla en una carta de 1852 enviada por un profesor de matemática de la universidad de Londres, Augustus De Morgan, a su amigo Sir William Rowan Hamilton. En ella, De Morgan comentaba que un estudiante suyo le había presentado el problema:

Un estudiante me pidió hoy que le explicara un hecho que yo ni siquiera sabía que era un hecho, ni lo sé aún ahora. Dice que si una figura se divide de alguna manera arbitraria y los compartimentos se colorean de forma diferente, de modo que regiones adyacentes tengan colores distintos, entonces cuatro colores son siempre suficientes para ello. [3]

El estudiante en cuestión era Frederick Guthrie, quien en 1880, reveló que quien había originado el problema en realidad había sido su hermano, Francis Guthrie, también estudiante de De Morgan. Mientras pintaba un mapa de Inglaterra, Francis notó que cuatro colores eran suficientes para colorearlo de manera tal que dos regiones limítrofes no tuvieran el mismo color. En efecto, la siguiente imagen muestra una posible manera:

Figura 16: Una elección de colores para el mapa de Gran Bretaña donde dos regiones adyacentes no tienen el mismo color.

Luego, Francis se preguntó si esto siempre sucedía, o sea si valía lo mismo para cualquier mapa arbitrario. De lo primero que se dio cuenta fue de que tres colores no eran suficientes, como se hace evidente en el siguiente caso:

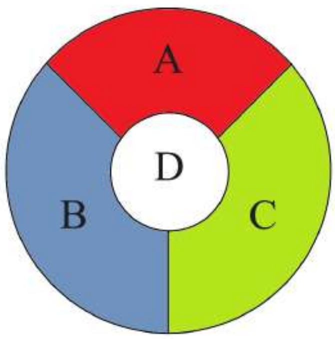

Figura 17: Notar que tres colores no son suficientes pues todas las regiones son limítrofes a las demás, y por lo tanto cada una debe llevar un color diferente.

Luego, se convenció de que generalmente cuatro colores eran los que se necesitaban, conjeturando entonces que estos eran siempre suficientes. Sin embargo, nunca publicó nada al respecto, y Hamilton no se mostró interesado en el tema. Así, quien se encargó de difundir el problema fue De Morgan, quien intentó que otros matemáticos se interesaran en él. En una larga reseña, publicada en el *Athenaeum* el 14 de abril de 1860, escribió:

Cuando uno colorea un mapa, digamos por ejemplo, los condados de un reino, es claro que necesitaremos muchos colores para que cada par de condados con una línea divisoria *común sean de diferentes colores. Ahora bien, los coloreadores de mapas deben haber sabido siempre que cuatro colores diferentes son suficientes...* .

Por su lado, Cayley, uno de los matemáticos más famosos de la época, planteó el problema a la Sociedad Matemática de Londres el 13 de junio de 1878, y preguntó si alguien había podido resolverlo.

El 17 de julio de 1879, Alfred Bray Kempe, un abogado londinense que había estudiado matemática con Cayley en Cambridge, anunció en la revista *Nature* que tenía una demostración de la conjetura. Cayley le sugirió a Kempe que enviara su prueba al *American Journal of Mathematics*, donde fue publicada ese mismo año. A partir de ese momento, Kempe ganó un gran prestigio y su demostración fue premiada cuando lo nombraron Miembro de la Sociedad Real, en la que actuó como tesorero por muchísimos años. Más aún, lo nombraron Caballero de la Reina en 1912. Kempe publicó dos pruebas más del ahora teorema de los cuatro colores, con versiones que mejoraban las demostraciones anteriores. Sin embargo, en 1890, Percy John Heawood encontró errores en las demostraciones de Kempe. Heawood mostró por qué y en dónde se había equivocado Kempe, y probó que con cinco colores alcanzaba para colorear cualquier mapa.

Kempe aceptó el error ante la sociedad matemática londinense y se declaró incompetente para resolverlo y rehacer su demostración. Por su lado, Heawood dedicó sesenta años de su vida a colorear mapas y a encontrar potenciales simplificaciones del problema, pero no pudo llegar a la prueba final. Así, el problema seguía sin solución y muchos científicos en el mundo le dedicaron buena parte de sus vidas a probar la conjetura sin suerte. Obviamente, también hubo mucha gente interesada en probar lo contrario, o sea, en encontrar un mapa que no se pudiera colorear con cuatro colores (hoy sabemos que esto no es posible).

Finalmente, recién en 1976 la conjetura tuvo solución y pasó a ser, nuevamente, el teorema de los cuatro colores. La demostración corrió por cuenta de Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quienes con la llegada de las computadoras lograron probar el resultado. [11][17]

Figura 18: Agustus De Morgan (1806-1871). Matemático y lógico indio.

Figura 19: Francis Guthrie (1831-1899). Matemático y botánico inglés.

Figura 20: Frederick Guthrie (1833-1886). Matemático y físico inglés.

4.3. Relación con Möebius

Como ya vimos, el problema de los cuatro colores fue planteado por Francis Guthrie en 1852. Sin embargo, algunas veces se ha afirmado, erróneamente, que el problema es más antiguo, remontándose a una conferencia dada por August Möebius alrededor de 1840. El *Problema de los cinco príncipes* que planteó Möebius es superficialmente similar al problema de los cuatro colores, así que veamos cómo es que llegaron a confundirse. [20]

En una de sus clases de geometría, Möebius planteó la siguiente pregunta, que aparentemente le había sido sugerida por un amigo de la Universidad de Leipzig, Benjamin Gotthold Weiske, quien tenía un gran interés en las matemáticas:

Había una vez un rey en la India que tenía un gran reino y cinco hijos. En su último testamento, el rey dispuso que, tras su muerte, los hijos debían dividir el reino entre ellos de tal manera que la región perteneciente a cada uno tuviera una línea fronteriza en común con las cuatro regiones restantes. ¿Cómo debía dividirse el reino?

En la siguiente clase, los alumnos de Möebius admitieron haber intentado resolver el problema, pero sin éxito. Möebius rió y dijo que lamentaba que hubieran luchado en vano, ya que tal división del reino es imposible. Veamos por qué.

Supongamos que las regiones pertenecientes a los tres primeros hijos se llaman A, B y C. Estas tres regiones deben tener límites comunes, como se muestra a continuación:

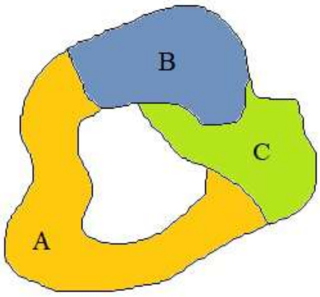

Figura 21

La región D perteneciente al cuarto hijo debe estar ahora completamente dentro del área cubierta por las regiones A, B y C, o completamente fuera de ella. Ilustramos esta situación:

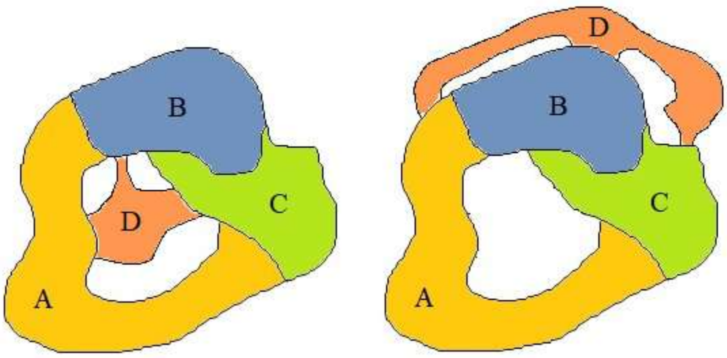

Figura 22

Pero entonces, es imposible ubicar la región E perteneciente al quinto hijo de forma que tenga límites con las otras cuatro, y por lo tanto el problema no tiene solución.

Por último, veamos por qué el problema de Möebius no dio origen al problema de los cuatro colores. Notemos primero que, de poder satisfacerse el deseo del rey, entonces las cinco regiones serían limítrofes y por lo tanto se necesitarían exactamente cinco colores para colorear el reino de modo que regiones adyacentes tengan colores diferentes. Luego, el teorema de los cuatro colores sería falso. Esto es equivalente a decir que si el teorema de los cuatro colores es verdadero, entonces no pueden existir cinco regiones que satisfagan el deseo del rey. Sin embargo, lo que **no** podemos afirmar es: "Si tales cinco regiones no existen entonces el teorema de los cuatro colores es cierto"; y por lo tanto Möebius no fue quien originó el problema.

4.4. La "prueba" de Kempe

La demostración de Kempe es constructiva en el sentido de que sus detalles implican un algoritmo recursivo de coloración basándose en la inducción sobre el número de regiones del mapa (o vértices del grafo).

El caso base es bastante fácil: cualquier mapa que contenga cuatro regiones o menos puede colorearse con, a lo sumo, cuatro colores. Luego, asumimos que cualquier mapa con n regiones puede colorearse con a lo sumo cuatro colores y llamamos M a un mapa que posee $n+1$ regiones. Utilizando la fórmula de Euler, Kempe obtuvo la llamada *counting formula* y probó así que todo mapa tiene al menos una región con cinco o menos regiones vecinas. En lenguaje de grafos, esto es decir que todo grafo plano tiene por lo menos un vértice de grado a lo sumo cinco. Luego, de esto se deduce que cada mapa contiene al menos un dígono, un triángulo, un cuadrado o un pentágono.

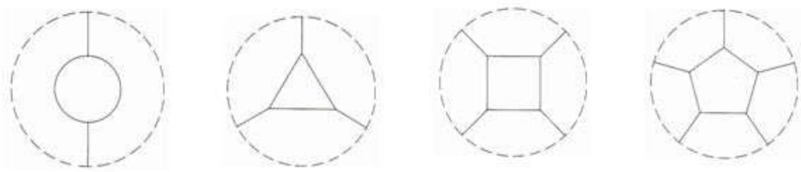

Figura 23: Dígono, triángulo, cuadrado y pentágono; respectivamente.

Sea entonces X una tal región, o sea, X posee cinco o menos regiones limítrofes. Ignorando por un momento a X, obtenemos un mapa con n regiones, al que llamamos $M - X$. Por hipótesis inductiva, este puede colorearse con a lo sumo cuatro colores, digamos rojo, verde, amarillo y azul. Luego, en este mapa $M - X$ hemos coloreado n regiones con a lo sumo cuatro colores dejando X sin colorear. El objetivo de Kempe era encontrar una manera de reducir, en caso de ser necesario, la cantidad de colores usados para las regiones limítrofes a X, de manera de que un color quede "libre" para colorear X.

Kempe primero reconoció fácilmente los casos más simples:

- Si X es adyacente a tres regiones o menos, entonces claramente habrá un color libre para colorearlo.
- Si X es adyacente a cuatro o cinco regiones coloreadas con a lo sumo tres colores, entonces nuevamente tenemos un color libre para asignarle a X.

Con estos casos resueltos, quedan por considerar dos un poco más difíciles.

- **Caso 1:** X es adyacente a exactamente cuatro regiones coloreadas con cuatro colores diferentes.

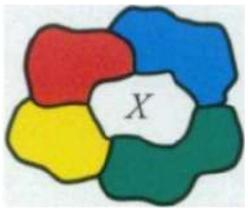

Figura 24

- **Caso 2:** X es adyacente a exactamente cinco regiones coloreadas con cuatro colores diferentes.

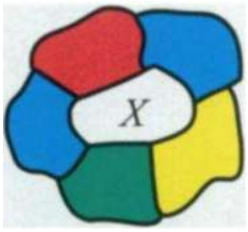

Figura 25

Para afrontarlos, Kempe introdujo las *cadenas de Kempe* de la siguiente manera: primero miramos todas las regiones en el mapa que estén coloreadas de rojo y verde. Kempe se dio cuenta de que estas forman una “cadena” continua de una o más regiones coloreadas de rojo y verde e hizo la importante observación de que podríamos intercambiar los colores en cualquiera de estas cadenas y el mapa seguiría estando coloreado correctamente, o sea, no habría dos regiones adyacentes del mismo color.

Para el caso 1, primero denotó A, B, C y D a las regiones adyacentes a X, y luego consideró dos subcasos.

- **Subcaso 1.1:** Supongamos que A y C no están conectados por una cadena rojo-verde. Supongamos A rojo y C verde. En esta situación, Kempe observó que podemos cambiar uno de los colores por el otro, resultando entonces ambos coloreados de verde o ambos coloreados de rojo. Si cambiamos el color de la región A, entonces como se muestra a continuación, A y C quedarían verdes y el color rojo queda libre para colorear a X.

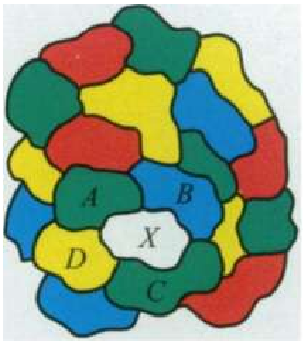

Figura 26

- **Subcaso 1.2:** Supongamos ahora que A y C están conectados por una cadena rojo-verde, como se muestra a continuación.

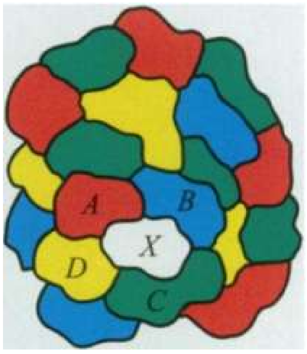

Figura 27

En este caso, Kempe observó que esta cadena forma un anillo alrededor de X que impide que B y D estén conectados por una cadena azul-amarillo, y por lo tanto podemos cambiar alguno de estos dos colores de manera tal que tanto B como D queden coloreados ambos de azul o ambos de amarillo. Luego, los colores que rodean a X son tres y por lo tanto nos queda uno libre para asignarle.

Para el caso 2, llamamos A, B, C, D y E a las regiones adyacentes a X y también consideramos dos subcasos.

- **Subcaso 2.1:** Supongamos que A y C no están conectados por una cadena rojo-amarilla, y que A y D no están conectados por una cadena rojo-verde. Así, hacemos algo similar al subcaso 1.1. donde realizamos un intercambio de colores.

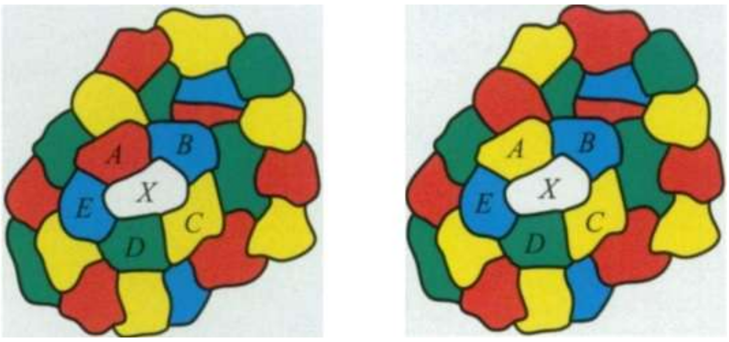

Figura 28: A la izquierda, un ejemplo donde A y C no están conectados por una cadena rojo-amarillo. A la derecha, intercambiamos rojo por amarillo y amarillo por rojo en la cadena que contiene a A y entonces liberamos el rojo para asignárselo a X.

- **Subcaso 2.2:** Supongamos ahora que A y C sí están conectados por una cadena rojo-amarillo y que A y D están conectados por una cadena rojo-verde. En esta situación, el método de Kempe para reducir la cantidad de colores que rodean a X contiene un error sutil.

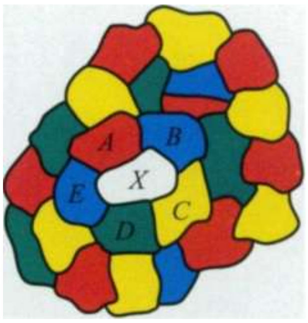

Figura 29: A y C conectados por rojo-amarillo y A y D conectados por rojo-verde.

Primero, Kempe observó correctamente que estas dos cadenas separan B de E: la cadena azul-verde a la que B pertenece es diferente a la cadena de D y E. Más aún, la cadena azul-amarillo a la que E pertenece es diferente a la cadena de B y C. Para reducir el número de colores que rodean X, Kempe afirmó que se podían intercambiar los colores en la cadena azul-verde a la que pertenece B y en la cadena azul-amarillo a la que E pertenecía, obteniendo como resultado B verde, E amarillo y A, C, D sin cambios; lo que permitiría colorear a X con azul. A continuación se muestra este procedimiento, y se obtiene el resultado esperado por Kempe. [13][4]

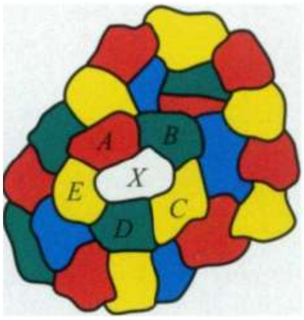

Figura 30

Y con esto, Kempe concluye su demostración. Pero sabemos que en realidad, su prueba contenía un error. ¿Cuál era? Veamos...

4.4.1. La falla en la prueba de Kempe

En el ejemplo utilizado para el subcaso 2.2, el procedimiento de Kempe funciona exactamente como él esperaba y el número de colores que rodean a X se redujo a tres. Sin embargo, y desafortunadamente para Kempe, este procedimiento podría no funcionar para todos los mapas que satisfacen las condiciones del subcaso 2.2. En 1890, Percy John Heawood encontró un ejemplo en el cual el método de Kempe fallaba. El ejemplo de Heawood presentaba una sutileza que había sido pasada por alto por el resto de la comunidad matemática durante más de diez años. Lo que se ignoraba era la posibilidad de que las cadenas azul-verde que contenía a B y la azul-amarilla que contenía a E se tocaran. Cuando esto sucede, cualquier intercambio de colores impide que la otra sea de alguna utilidad. A continuación, podemos ver el mapa que Heawood propuso y cómo las cadenas azul-amarillo que contiene a E y la azul-verde que contiene a B tienen una frontera común, esto es, se "tocan".

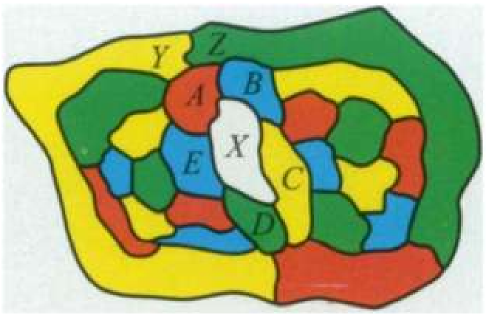

Figura 31: Las cadenas azul-verde y las cadenas azul-amarillo tienen una frontera común.

Si intercambiamos los colores en ambas cadenas, entonces los dos países que comparten la frontera, esto es Y y Z, quedarían de color azul. Así, Heawood afirmaba que la prueba de Kempe no vale a menos que se pudieran hacer en ella ciertas modificaciones para poder afrontar este caso. Kempe intentó corregir su demostración, pero no tuvo éxito ni tampoco sus contemporáneos. Las modificaciones que debían realizarse tomarían muchos años de trabajo por parte de varios individuos. Sin embargo, las ideas y técnicas utilizadas por Kempe fueron sumamente importantes para el desarrollo posterior de la teoría de coloraciones y problemas relacionados.

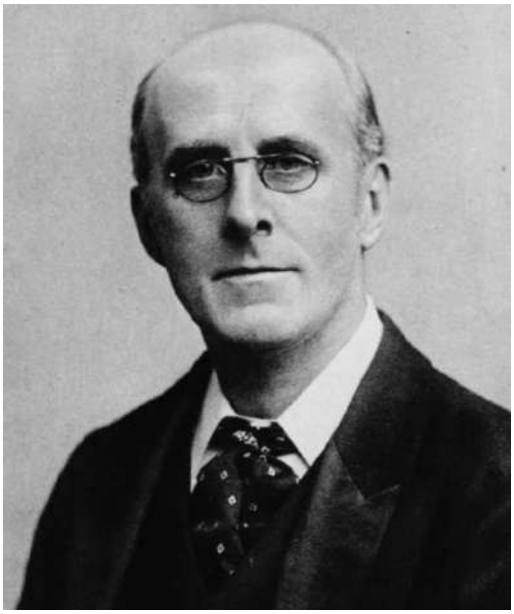

Figura 32: Alfred Kempe (1849-1922). Abogado y matemático inglés.

Figura 33: Percy John Heawood (1861-1955). Matemático inglés.

4.5. La prueba definitiva

Ahora exploraremos el trabajo de Appel y Haken, quienes lograron dar la demostración definitiva del teorema. La construcción de la misma se dividió básicamente en dos partes: encontrar un conjunto de subgrafos del cual al menos un miembro debe estar contenido en cada grafo plano conexo y, en segundo lugar, demostrar que estos subgrafos son 4-coloreables.

4.5.1. Inevitabilidad y reducibilidad

Existe una aproximación alternativa al teorema de los cuatro colores: supongamos que la conjetura es falsa, es decir, existen mapas que no son 4-coloreables. Entre estos mapas que necesitan cinco colores o más, debe de haber alguno con el menor número posible de regiones: lo que se llama un *minimal criminal*. Así, un minimal criminal no es 4-coloreable, pero un mapa con menos regiones sí lo es. Luego, para probar el teorema de los cuatro colores hay que demostrar que no existen minimales criminales, y eso se consigue encontrando condiciones restrictivas sobre este tipo de mapas. De hecho, en este nuevo lenguaje, lo que Kempe demuestra con su prueba es que un minimal criminal no puede contener dígonos, triángulos o cuadrados y se equivoca al intentar probar que tampoco puede contener pentágonos. Precisamente, si hubiese conseguido esto último, habría quedado establecida la conjetura: no podrían existir minimales criminales ya que, como se ha comentado antes, cualquier mapa debe contener obligatoriamente un dígono, un triángulo, un cuadrado o un pentágono.

Definición 4.3. Los siguientes conceptos son fundamentales en la prueba.

1. Una *configuración* en un grafo es un ciclo con vértices internos triangulados; o sea las caras del grafo tienen exactamente tres aristas.

2. Un *conjunto inevitable* K es un conjunto finito de configuraciones tal que todo grafo contiene una copia conforme[4] de una k de K: de hecho, Kempe demuestra que para mapas cúbicos, $K = \{$dígonos, triángulos, cuadrados, pentágonos$\}$ es un conjunto inevitable (y se equivoca).

3. k es una configuración *reducible*, si se puede deducir el coloreado de cualquier grafo que contenga a k, a partir de un grafo menor. En particular, una configuración reducible es cualquier disposición de vértices que no puede existir en un minimal criminal.

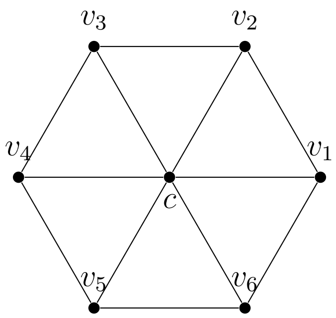

Figura 34: Una configuración clásica: hexágono con vértice central triangulado.

El objetivo de la prueba consiste entonces en encontrar un conjunto inevitable K formado sólo de configuraciones reducibles. Si esto sucede, entonces la demostración del teorema de los cuatro colores estaría terminada pues tendríamos que no podría existir un minimal criminal.

Durante todo el siglo XX, muchos matemáticos trabajaron en la conjetura para poder dar una demostración. Destacamos los siguientes hechos:

- En 1913, **George David Birkhoff** publica el artículo *The reducibility of maps*, donde avanza en el estudio de los conjuntos reducibles. Su contribución es utilizada por otros matemáticos para demostrar la conjetura en el caso de mapas que tienen ciertas cantidades (pequeñas) de regiones Algunos de ellos son:

[4]Una copia *conforme* es un subgrafo isomorfo a la configuración que estamos buscando.

- **Philip Franklin**, que en 1922 publicó ejemplos de conjuntos inevitables y utilizó la idea de reducibilidad para demostrar, entre otros resultados, que cualquier mapa con 25 regiones o menos es 4-coloreable.
- En 1926, **Clarence Reynolds** aumentó el número de regiones a 27.
- **C. E. Winn** logró probarlo para 35 regiones o menos en 1940.
- **Oystein Ore** y **Joel Stemple** lo hicieron para 39 en 1970.
- En 1976, **J. Mayer** logró aumentar la cantidad de regiones a 95.

- Por su parte, **Heinrich Heesch** sistematiza la prueba de la reducibilidad, desarrollando un algoritmo que intenta implementar con ordenador. Luego de realizar diversos tests, anuncia que la conjetura puede resolverse estudiando solamente 8.900 configuraciones. A través de su algoritmo de descarga, propone un método de construcción de conjuntos inevitables: la idea de Heesch es considerar el grafo como una red eléctrica, asociando a cada vértice una carga inicial de $(6 - i)$, donde i es el grado de ese vértice en particular. Por ejemplo, un vértice de grado 5 tendrá una carga de $+1$, un vértice de grado 6 tendrá carga cero o nula, y un vértice de mayor grado tendrá una carga negativa.

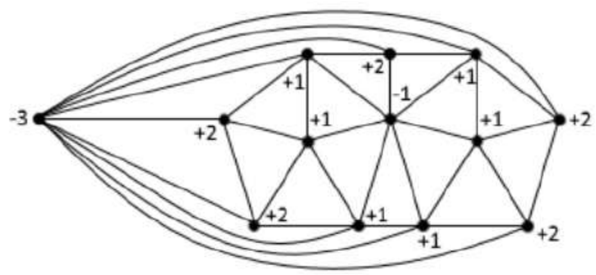

Figura 35: Un ejemplo en donde mostramos la carga de cada uno de los vértices del grafo.

Denotando v_i a la cantidad de vértices de grado i, la carga total de un grafo está dada por

$$\sum_{i=1}^{\infty}(6 - i)v_i$$

y siempre suma 12.

Si se desplazan las cargas eléctricas sobre la red, mediante un algoritmo de descarga, la suma total no varía: sigue siendo 12. Los vértices cargados positivamente pueden ceder cargas, los cargados negativamente pueden recibir y los de carga nula no intercambian. Con este proceso, el objetivo es eliminar de esta red eléctrica los vértices de carga negativa, obteniendo un conjunto de configuraciones con vértices de cargas positivas o nulas, y como todo grafo triangulado es de carga total 12, debe contener al menos una de las configuraciones del conjunto anterior, que forma entonces un conjunto inevitable. Una vez obtenida la extensa lista de configuraciones inevitables, si se prueba que todas son reducibles se dispone finalmente de una prueba inductiva de la conjetura.

Para entender los procedimientos de descarga, veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.1. Probaremos que el siguiente es un conjunto inevitable de configuraciones.

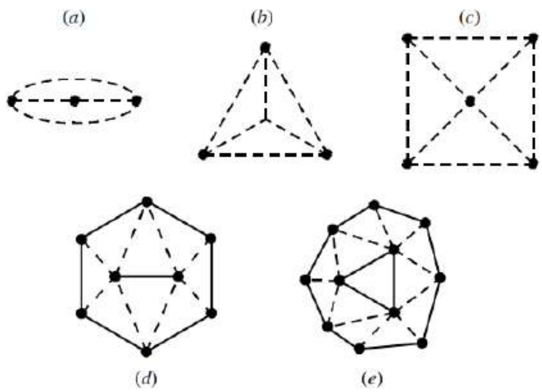

Figura 36

Por el absurdo, supongamos que existe una triangulación plana G que no contiene ninguna de las configuraciones de la Figura 36. Se puede probar que:

1. G no tiene vértices de grado menor a 5.
2. Todo vértice v de grado 5 en G es adyacente a, al menos, tres vértices de grado 7 o más.
3. Todo vértice v de grado 7 en G es adyacente a, a lo sumo, tres vértices de grado 5.
4. Todo vértice v de grado mayor o igual a 8 en G es adyacente a, a lo sumo, $[\frac{1+i}{2}]$[5] vértices de grado 5.

Luego, asignamos carga a cada uno de los vértices de G (de la forma que se explicó anteriormente) y comenzamos con el proceso de descarga: primero cedemos $\frac{1}{3}$ de la carga de cada vértice de grado 5 a cada uno de sus vecinos de grado 7 o más. De esta forma, los vértices de grado 5 quedan con carga negativa o nula. Por su parte, los vértices de grado 6 permanecen con carga nula. Los vértices de grado 7 no quedarán con carga positiva y los de grado $i \geq 8$ quedarán con carga a lo sumo

$$6 - i + \frac{1}{3}\left[\frac{1+i}{2}\right] < 0$$

[5]Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $[r]$ es el mayor entero tal que $[r] \leq r$.

de donde no obtenemos ningún vértice que haya quedado con carga positiva, y por lo tanto la carga total no puede ser igual a 12, lo cual es un absurdo.

- A partir de entonces, el progreso es lento hasta que, en 1976, **Ken Appel** y **Wolfgang Haken** dan una prueba utilizando como ingredientes principales estos conceptos de reducibilidad y descarga, y viendo que todas las configuraciones de la lista son irreducibles.

4.5.2. La prueba de Appel y Haken

La estrategia detrás de la prueba de Appel y Haken es redistribuir la carga en el grafo utilizando un algoritmo de descarga especialmente diseñado de tal manera que se minimice el número de vértices positivos, siempre teniendo en cuenta la restricción de que la carga total debe permanecer inalterada. Entonces, cada una de las configuraciones identificadas por las cargas positivas restantes debe reducirse.

El diseño de un algoritmo de descarga adecuado requirió aproximadamente tres años y medio. Para cada vértice con carga positiva producido por el algoritmo en borrador, Haken y Appel intentaron encontrar una configuración reducible a su alrededor, para lo cual utilizaron algoritmos informáticos especialmente diseñados. Si no se descubría ninguna configuración reducible en un tiempo razonable —quizás media hora de búsqueda en el ordenador—, asumían que no existía y volvían a modificar el algoritmo de descarga para evitar tales situaciones.

Cuando finalmente se convencieron de que tenían un algoritmo que localizaba únicamente configuraciones reducibles, Appel y Haken comenzaron la verificación sistemática de la reducibilidad para todos los casos de carga positiva producidos por el algoritmo. El catálogo resultante contenía 1.936 configuraciones reducibles, cada una de las cuales requería una búsqueda de hasta 500.000 opciones para verificar su reducibilidad. Luego, modificando el algoritmo de descarga para producir un conjunto inevitable cada vez mejor, encontraron otro mejorado que produjo un conjunto de 1.482 configuraciones inevitables. Esta última fase del trabajo duró seis meses y se completó en junio de 1976. La comprobación final, parte de la cual fue realizada por los hijos adolescentes de los investigadores, duró todo el mes de julio y los resultados se comunicaron al Boletín de la American Mathematical Society el 26 de julio de 1976.

4.5.3. Controversias

La demostración de Appel y Haken ha causado diversas conmociones en el mundo matemático. La verificación de una conjetura que había desafiado a los mejores matemáticos del siglo XX es un logro asombroso. Pero una solución basada en análisis de casos computarizados que involucran casi dos mil casos y diez mil millones de opciones lógicas es la antítesis total de la demostración matemática idealizada y “elegante”.

Esta demostración es el primer ejemplo de un problema matemático importante resuelto mediante una computadora. Muchos matemáticos consideran que este resultado es sólo el preludio de demostraciones mejores, más breves y conceptuales. En defensa de su formidable método, Haken y Appel observan que el suyo se acerca a una demostración óptima, dentro de la tradición de Kempe de buscar conjuntos inevitables de configuraciones reducibles. Cada configuración que debe reducirse está rodeada por un anillo de vecinos que determinan su reducibilidad. El tamaño de este anillo influye considerablemente en la dificultad de establecer la reducibilidad.

El resultado de Appel y Haken apunta, por lo tanto, a la existencia de una nueva clase de teoremas matemáticos que son verdaderos, pero para los cuales no existe una demostración simple. La exploración de este ámbito mediante el trabajo en equipo entre matemáticos y computadoras es, según Haken y Appel, un gran desafío para los matemáticos en el último cuarto del siglo XX. "Este trabajo ha cambiado mi visión de las matemáticas", dijo Haken. "Espero que haga lo mismo para otros". Por último, y como un tributo a Alfred Kempe, Appel y Haken declararon: "El argumento de Kempe era extremadamente inteligente y, a pesar de que su prueba no estuvo completa, contiene la base para las ideas que llevaron a la prueba definitiva un siglo más tarde." [10][14][15][16]

Figura 37: De pie, Kenneth Appel (1932-2013) junto Wolfgang Haken (1928-2022).

4.5.4. Una nueva prueba del teorema

En 1996, N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas publicaron *A new proof of the four-colour theorem*, la cual aporta fundamentalmente lo siguiente:

- Elimina complicaciones, confirmando que la inevitabilidad de un conjunto reducible puede probarse sin explorar tantos ejemplos como en la prueba de Appel y Haken.
- El conjunto inevitable de su demostración es de tamaño 633.
- Dan un conjunto de tan solo 32 reglas de descarga.
- La comprobación a mano de la inevitabilidad se reemplaza por una prueba formal que puede verificarse con un ordenador.
- La comprobación dura únicamente 3 horas en cualquier ordenador doméstico.

En 2004, Benjamin Werner y Georges Gonthier verificaron la prueba de 1996 (con alguna aportación original), formulando el problema en términos del programa Coq. Este es un software de tipo asistente de pruebas formales que sirve para escribir definiciones matemáticas con precisión lógica, probar teoremas formalmente, y verificar propiedades de programas informáticos.

Con la ayuda de Coq, Werner y Gonthier eliminaron la necesidad de fiarse de los variados programas de ordenador usados para verificar los casos particulares y con este sistema, confirmaron la validez de cada una de las etapas de la prueba.

5. Aplicaciones

Para concluir, me parece interesante mencionar algunas aplicaciones prácticas de la coloración de grafos y del teorema de los cuatro colores, dado que estas ideas aparecen en problemas reales para ayudar a resolver conflictos y optimizar recursos.

Para más detalles se pueden ver [1] y [9].

5.1. Programación de tareas o asignación de recursos

En la planificación de actividades que no pueden realizarse al mismo tiempo, cada tarea puede representarse como un vértice y una arista conecta dos vértices si sus tareas asociadas no pueden coincidir en el tiempo. Una coloración de vértices permite asignar recursos distintos a tareas en conflicto, y el número cromático indica el número mínimo de recursos necesarios para llevar a cabo todas las tareas sin interferencias.

5.2. Diseño de compiladores

En informática, una aplicación conocida de la coloración de vértices aparece durante el proceso de traducción de un programa a instrucciones que pueda ejecutar una computadora. Este proceso lo realiza un compilador, que transforma el código escrito por una persona en lo que se conoce como código máquina. Durante esta traducción, el compilador debe asignar a cada variable del programa un lugar de almacenamiento temporal dentro del procesador, llamado registro. Como la cantidad de registros es muy limitada, se busca una asignación eficiente que evite conflictos. Para resolver este problema, se puede usar un grafo en el que cada vértice representa una variable, y se une con una arista a otra si ambas están activas al mismo tiempo (es decir, si necesitan un registro al mismo tiempo). Así, una coloración del grafo permite asignar registros distintos a variables que no pueden compartirlos, y el número cromático indica cuántos registros se necesitan como mínimo.

5.3. Comunicaciones inalámbricas

La coloración de vértices resulta útil para evitar interferencias entre dispositivos o regiones que comparten canales de transmisión. Si se representa cada dispositivo o área como un vértice, y se conecta con aristas a los que pueden interferirse entre sí, una coloración adecuada asegura que se asignen frecuencias diferentes a nodos adyacentes. De esta forma, el número cromático del grafo representa la cantidad mínima de frecuencias necesarias para garantizar una transmisión sin conflictos.

5.4. Redes de telecomunicaciones móviles

Las antenas de telefonía celular cubren distintas regiones del territorio y cuando dos regiones cubiertas se superponen parcialmente o son adyacentes, es necesario que sus antenas operen en frecuencias distintas para evitar interferencias en la transmisión de datos. Dado que el espectro de frecuencias está regulado y suele implicar costos, resulta deseable utilizar la menor cantidad posible de frecuencias.

Si se modela el sistema de cobertura como un mapa plano en el que cada región corresponde a una celda del sistema y dos regiones vecinas están conectadas por una arista, entonces el problema se convierte en una coloración de vértices de un grafo planar. El teorema de los cuatro colores garantiza que es posible realizar esta coloración usando a lo sumo cuatro colores, es decir, cuatro frecuencias distintas. Esto proporciona una cota teórica que asegura que, al menos en condiciones ideales, bastan cuatro frecuencias para diseñar una red libre de interferencias sobre un territorio plano.

Conclusión

Como mencioné al principio, uno de los aspectos que me pareció más llamativo del problema es la simplicidad de su planteamiento: no se requiere una educación especializada para hacerlo; aunque sí se necesitó una revolución técnica y una transformación del concepto mismo de demostración para resolverlo.

A lo largo de toda la historia que envuelve al problema, hay episodios que merecen ser destacados no sólo por su importancia teórica, sino también por lo que nos dicen sobre cómo hacemos matemática. El caso de Alfred Kempe es uno de ellos. Su intento de demostración no fue solamente una aproximación fallida sino que, en cierta forma, fue lo que catapultó las ideas centrales para una demostración, las cuales serían retomadas mucho tiempo después. Aunque su argumento resultó incompleto, su enfoque fue realmente brillante.

Siento entonces que esto nos invita a reflexionar sobre el valor de las ideas en matemática, incluso cuando no alcanzan su objetivo final. Muchas veces tendemos a pensar que sólo los resultados correctos son los que merecen reconocimiento, pero la historia de este teorema es un ejemplo de que las ideas "imperfectas" también hacen avanzar el conocimiento y que, de cierta manera, los errores pueden ser muy fértiles.

Del mismo modo, la forma en que finalmente se resolvió el teorema también obligó a repensar lo que significa "probar" algo en matemática. La demostración de Appel y Haken marcó un punto de inflexión. No por haber sido necesariamente más ingeniosa que los intentos anteriores, sino por haber sido la primera en reconocer que, para lidiar con la complejidad del problema, se necesitaba ayuda de una máquina. De esta forma, la idea de la demostración como argumento autosuficiente y elegante fue puesta en duda.

Sin embargo, esto también es un aprendizaje que nos lleva a pensar que la matemática no es un conjunto cerrado de reglas fijas, sino una disciplina viva, que cambia cuando cambian sus herramientas. La introducción de la computadora en las demostraciones fue, en este contexto, un paso necesario, no solo para resolver este teorema en particular, sino también para expandir lo que entendemos por conocimiento riguroso. No se trata de renunciar a la elegancia, sino de aceptar que la verdad matemática puede adoptar formas nuevas, a veces menos "bellas" pero no por eso menos válidas.

El teorema de los cuatro colores también nos hace ver la relación entre lo visual y lo abstracto, entre la intuición y la formalidad. Su solución, más allá de lo difícil que resultó, sigue hablando de cosas que vemos todos los días. Un mapa, una frontera, un color. Elementos sencillos que esconden una estructura combinatoria sumamente compleja. Y eso, en mi opinión, resulta lo más lindo: que las preguntas profundas a veces vienen disfrazadas de situaciones aparentemente muy inocentes.

De esta forma, su legado no está solamente en haber cerrado una pregunta antigua, sino en haber abierto muchas nuevas: sobre la estética de las demostraciones, sobre el rol de la tecnología en la validación matemática, sobre la relación entre lo aparentemente simple y lo profundamente complejo; y así, con apenas cuatro colores, se pintó una de las historias más fascinantes que haya tenido la matemática.

Referencias

[1] A. Aho, M. Lam, R. Sethi, and J. Ullman. *Compilers: Principles, Techniques, and Tools*. Pearson, 2007.

[2] D. Barnette. *Map Coloring, Polyhedra, and the Four-Color Problem*. The Mathematical Association of America, 1983.

[3] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson. *Graph Theory, 1736-1936*. Clarendon Press, 1976.

[4] R. Fritsch and G. Fritsch. *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof*. Springer, 1998.

[5] J. Galeano and J. M. Pastor. *De los puentes de Königsberg a las redes sociales*. ESME EDDP, 2019.

[6] G. Gutin and A. P. Punnen. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*. Springer, 2007.

[7] B. Korte and J. Vygen. *Combinatorial Optimization*. Springer, 2018.

[8] O. Levin. *Discrete Mathematics, an introduction*. Oscar Levin, 2016.

[9] M. Molloy and B. Reed. *Graph Colouring and the Probabilistic Method*. Springer, 2002.

[10] S. E. Nanjwenge. The four colour theorem. *Linnaeus University*, 2018.

[11] A. Paenza. *Matemática... ¿estás ahí? Sobre números, problemas y curiosidades*. Siglo XXI Editores Argentinos S.A., 2005.

[12] J. N. Sandalinas. *Del simple cálculo al análisis matemático*. RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, 2012.

[13] T. Sipka. Kempe's "proof" of the four-color theorem. *Math Horizons*, 10:21–26, 2002.

[14] A. Soifer. *The Mathematical Coloring Book*. Springer, 2009.

[15] M. M. Stadler. Mapas, colores y números. In *Curso Interuniversitario Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2006*. Universidad de La Laguna, La Laguna, España, 2006.

[16] L. Steen. Solution of the four color problem. *Mathematics Magazine*, 49:219–222, 1976.

[17] R. Thomas. An update on the four-color theorem. *Notices of the AMS*, 45(7):848–859, 1998.

[18] J. H. van Lint and R. M. Wilson. *A Course In Combinatorics*. Cambridge Univertsity Press, 1992.

[19] A. M. Velázquez. Una breve introducción a la teoría de grafos. *Suma*, pages 11–26, 1998.

[20] R. J. Wilson. *Four Colours Suffice : How the Map Problem Was Solved*. Princeton University Press, 2002.