NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina

Una nueva invitación a la CIMA

Mauro Subils

Universidad Nacional de Rosario

Me gustaría comenzar este artículo citando a Adrián Paenza en su carta de despedida de la Competencia que llevaba el nombre de su padre: *El objetivo nunca fue seleccionar "a los mejores", sencillamente porque nunca creímos en que hay ni mejores ni peores. No. La idea fue siempre disfrutar de la capacidad de pensar, de desafiarse, de frustrarse pero también de divertirse buscando soluciones*. Ese objetivo conformaba la esencia de la Competencia Ernesto Paenza, cuya posta fue tomada por la Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina, o simplemente "la CIMA".

El 27 de agosto de este año se realizó su undécima edición y con este artículo, al igual que con los anteriores, buscamos invitar a los estudiantes universitarios a participar y al resto de la comunidad a difundir el evento a lo largo y ancho del país.

En lo personal, tras haber competido durante mi educación secundaria en la Olímpiada Matemática Argentina, encontré en la competencia Ernesto Paenza un lugar donde enfrentar problemas nuevos en un contexto más avanzado pero conservando el mismo espíritu.

Al enterarme en 2011 que la competencia dejaba de existir, sentí una gran tristeza, a pesar de que en ese entonces ya no podía participar. Consideraba que se perdía un lugar muy valioso para los estudiantes universitarios y para la comunidad matemática en general. Por eso recibí con gran alegría la noticia que había personas dispuestas a retomar este lugar, entre los que quiero destacar a Leandro Cagliero y Juan Pablo Rossetti de la Universidad Nacional de Córdoba. Como paréntesis los invito a leer, si no lo hicieron aún, su artículo sobre la historia de la CIMA en el noticiero de la UMA del año pasado.

En 2014, cuando se realizó la segunda edición, Juan Pablo me convocó a formar parte del jurado, tarea que desempeñé hasta el año pasado y de la que he disfrutado y aprendido mucho ya que posibilita transitar el encuentro desde otra perspectiva.

En la CIMA uno encara problemas sin tener que restringirse a un marco teórico fijado por una asignatura particular. Consiste en un desafío diferente a un parcial o examen, uno encuentra más libertad para recurrir a la imaginación y a la creatividad.

Además, lo más importante, más allá que te "salgan" o no los problemas, es que la discusión con los compañeros/as durante y después de la prueba resulta enriquecedora. Estos intercambios que se posibilitan en el encuentro no suelen darse en otros ámbitos. Animarse a pensar problemas implica, la mayor parte de las veces, encontrarse con la frustración y la necesidad de construir con otros para hallar caminos de resolución posibles. En esa construcción conjunta, los premios, las menciones y los resultados, quedan en segundo plano. Por eso es importante que la CIMA siga creciendo y que sigamos apostando para que llegue a todos los lugares del país donde haya alguien que disfrute de pensar matemática.

A continuación, quiero mostrarles un ejemplo de un problema de la CIMA donde el álgebra y la geometría interactúan.

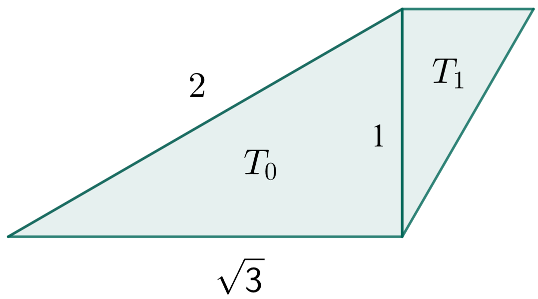
Problema 5 de la edición 2023

Una triangulación simplicial es una partición en triángulos con interiores disjuntos de forma que ningún vértice de un triángulo está en el interior de un lado de otro triángulo. Demostrar que no existe ninguna triangulación simplicial de un cuadrado por triángulos semejantes de ángulos $30°$, $60°$ y $90°$.

Les dejamos la solución realizada por el grupo conformado por Lorenzo Ruiz Díaz y Lucas Sandleris (Universidad de Buenos Aires).

Razonando por el absurdo supongamos que existe una triangulación de un cuadrado con las propiedades indicadas. Mediante un escalamiento de la figura podemos asumir que uno de los triángulos tiene catetos de longitudes 1 y $\sqrt{3}$, e hipotenusa de longitud 2. Denotemos por T_0 a dicho triángulo.

Como todos los triángulos que conforman la triangulación son semejantes entre sí, aquellos que comparten un lado deben tener una razón de semejanza perteneciente al conjunto $\mathcal{C} = \left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, es decir, la razón entre un par de lados de uno de los triángulos. Por ejemplo, en la figura, la razón de semejanza entre T_1 y T_0 es $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



De este modo, la razón de semejanza entre dos triángulos cualesquiera de la triangulación es un producto de elementos de $\mathcal{C}$, por lo que pertenece al conjunto $\mathbb{Q} \cup \sqrt{3}\mathbb{Q}$. Sean T_i, con $i = 0, \ldots, n$, los triángulos que conforman la triangulación y sea $t_i \in \mathbb{Q} \cup \sqrt{3}\mathbb{Q}$ la razón de semejanza entre T_i y T_0. En particular, $t_0 = 1$.

Como T_i tiene catetos de longitud t_i y $\sqrt{3}t_i$, su área es

$$t_i^2\frac{\sqrt{3}}{2},$$

por lo que área total del cuadrado es

$$\sum_{i=0}^{n} t_i^2\frac{\sqrt{3}}{2},$$

valor que pertenece a $\sqrt{3}\mathbb{Q}$ ya que t_i^2 es racional para todo i.

Por otra parte, un lado del cuadrado debe estar cubierto por lados de algunos de los triángulos de la triángulación; por lo tanto, su longitud es la suma de números de $\mathbb{Q} \cup \sqrt{3}\mathbb{Q}$. Esto implica que la longitud del lado del cuadrado puede escribirse de la forma $a + b\sqrt{3}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$. En consecuencia, el área del cuadrado es

$$(a + b\sqrt{3})^2 = c\sqrt{3}$$

para cierto c racional. Esto se desarrolla como

$$a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3} = c\sqrt{3}$$

Dado que $\sqrt{3}$ es irracional la igualdad solo puede cumplirse si

$$a^2 + 3b^2 = 0 \text{ y } 2ab = c.$$

De la primera ecuación se sigue que $a = 0$ y $b = 0$ lo que implica que la longitud del lado del cuadrado es cero, contradicción que demuestra que tal triangulación no puede existir.

Agradecimientos: Quiero agradecerle a Juan Pablo Rossetti por invitarme a formar parte del jurado y a todas y todos los jurados con los que me tocó compartir a lo largo de estos años: Leandro Cagliero, Iván Angiono, Diego Sulca (Universidad Nacional de Córdoba), Martín Mereb, Carlos Di Fiore, Jonathan Barmak, Gabriela Jerónimo (Universidad de Buenos Aires), Carlos D'Andrea (Universitat de Barcelona), Rocío Díaz Martín (Tufts University) y Luis Ferroni (Universitá di Pisa). Quiero destacar también el labor de las secretarias que han cumplido y cumplen una importante tarea para que se pueda realizar la competencia: María Chara (Universidad Nacional del Litoral), Erica Hinrichsen, María Inés López Pujato, Natali Vanteenkiste, María Gracia Cornet y Lara Fernández (Universidad Nacional de Rosario). Por último, agradecer a todos los que han sido o son delegados/as de cada sede y se encargan de tomar la prueba. Todas y todos los mencionados, desde el aporte de su compromiso y tiempo, han hecho posible año tras año este encuentro.

Ir al índice general