

## Miradas Matemáticas

### El arte de medir la convergencia: oscilación y variación

Raquel Crescimbeni

Dpto. de Matemática-FaEA

Universidad Nacional del Comahue-IITCI (CONICET)



#### Resumen

En este breve trabajo se pretende mostrar algunos aspectos de los operadores oscilación y variación, sobre los cuales la autora ha tenido la oportunidad de trabajar junto a otros investigadores. En el trayecto recordar quienes fueron los pioneros en el estudio de este tema, la transversalidad de uso entre diferentes campos de la matemática, como así también la implicancia que tiene su estudio no sólo en el análisis de velocidad de convergencia de una familia de operadores, sino también en la convergencia puntual de la misma.

#### Introducción

Uno de los problemas mas estudiados dentro del análisis armónico es el siguiente: dada una familia  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  de operadores acotados actuando entre espacios funcionales, conocer el  $\lim_{t \rightarrow 0} T_t f$  y el  $\lim_{t \rightarrow \infty} T_t f$ , para  $f$  en cierta clase de espacios funcionales.

Ejemplos de estas situaciones pueden encontrarse en estudios de convergencias de soluciones de la ecuación del calor y la de Poisson a su valor de borde. Más aún, si los operadores convergen, es natural preguntarse sobre la velocidad de convergencia de esta familia a su límite o también cuánta oscilación se produce cuando la familia se acerca al mismo.

Para precisar las ideas, sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida, consideremos (para simplificar) una cantidad numerable de operadores  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $L^p(X)$ . De esta familia podemos tomar las diferencias  $|T_k f(x) - T_{k+1} f(x)|$  elevadas a alguna potencia  $\rho > 0$ , luego sumamos los términos resultantes y para preservar la homogeneidad tomamos la  $\rho$ -ésima raíz, de esta manera logramos el siguiente operador,

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} |T_k f(x) - T_{k+1} f(x)|^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (1.1)$$

Sea la siguiente modificación de este operador: fijemos una sucesión  $n_k$  y analicemos cómo oscila la familia  $T_k$  a lo largo de esta sucesión, en otras palabras sean las diferencias  $|T_{n_k}f(x) - T_{n_{k+1}}f(x)|$ , a las que asociamos el siguiente operador

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} |T_{n_k}f(x) - T_{n_{k+1}}f(x)|^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (1.2)$$

Observemos que el operador (1.1) es un caso particular del operador (1.2) basta considerar  $n_k = k$ .

Para  $\rho = 2$  estos operadores son un tipo de función cuadrado. Debemos resaltar que en muchas áreas del análisis, teoría ergódica y probabilidad, la función cuadrado es y ha sido una herramienta útil para estudiar velocidad de convergencia para familias de operadores. Su estudio se remonta a los años 30 del siglo pasado y los nombres de Littlewood y Paley están asociados a él. Un amplio y completo compilado asociado a la función cuadrado puede leerse en el ensayo escrito por E. Stein [23]. Por otro lado no debemos dejar de mencionar que la función cuadrado ha sido utilizada por Burkholder, Gundy y Silverstein en [10] para dar la primera caracterización real del espacio de Hardy  $H^p$ .

A la hora de estudiar y cuantificar cuánto oscila la sucesión de operadores, debemos notar que en la definición (1.2) es posible que no hayamos capturado toda la variación de la familia de operadores  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , ya que probablemente pudimos haber elegido una subsucesión en donde la convergencia sea bastante rápida. Es por ello que para el estudio sea mas preciso es necesario hacer un ajuste a nuestro operador y ello se logra tomando el supremo sobre todas las subsucesiones, lo que da origen a la definición de los operadores variación y oscilación que a continuación presentamos. Daremos las definiciones para una familia de operadores con parámetro continuo.

**Definición 1.** Sea  $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  una familia de operadores, el operador  $\rho$ -variación para  $\rho > 0$  se define como

$$\mathcal{V}_{\rho}(\mathcal{T})f(x) = \sup_{t_i \searrow 0} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |T_{t_i}f(x) - T_{t_{i+1}}f(x)|^{\rho} \right)^{1/\rho} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_{\rho}},$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  que decrecen a cero.

**Definición 2.** Sea  $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  una familia de operadores, el operador oscilación puede ser considerado como

$$\mathcal{O}(\mathcal{T})f(x) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{t_{i+1} < \delta_i \leq t_i} |T_{t_{i+1}}f(x) - T_{\delta_i}f(x)|^2 \right)^{1/2} = \|T_t f(x)\|_{\mathcal{O}},$$

para  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión fija decreciendo a cero.

Si los operadores  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  a considerar provienen de truncaciones en otro extremo que no sea el cero, es posible argumentar siempre como en el caso de truncaciones cerca del cero, ya que podemos controlar las truncaciones en ambas direcciones por una suma de operadores, cada uno de los cuales controla la truncación sólo en un extremo.

El operador de oscilación y la  $\rho$ -variación de una familia de operadores son conceptos claves en el análisis funcional y la teoría de operadores, especialmente en el estudio de la regularidad y la convergencia de familias de operadores en espacios de Banach. En teoría ergódica y procesos estocásticos para controlar la variación de procesos de Markov y trayectorias de sistemas dinámicos. En ecuaciones diferenciales y cálculo fraccionario para analizar la regularidad de soluciones estudiando el control de sus variaciones.

## 1. Algunos antecedentes

Múltiples referencias pueden darse sobre quienes iniciaron el estudio de estos operadores. Recordaremos algunas de ellas, y por supuesto todas las referencias relacionadas con el tema que se encuentran en los artículos que mencionaremos a lo largo de todo este trabajo.

El primero en probar acotación en  $L^2(X)$  del operador oscilación, ha sido Gaposhkin en [15], trabajando sobre una familia de promedios ergódicos (ver 3), que en lugar de mover los índices sobre los naturales considera una sucesión  $n_k$  de naturales que es de tipo lacunary, es decir tiene algún control en su crecimiento. Posteriormente Bourgain en [7], trabajó con maximales ergódicas más generales y sucesiones lacunary, probando también la acotación en  $L^2(X)$ . Usando modificaciones de las técnicas de Bourgain ha sido White [24] quien mejora estos resultados, al considerar una familia mas amplia de sucesiones.

Como pionero en introducir el operador variación, podemos citar a Bourgain [8], que en su estudio sobre martingalas (ver 3) obtiene acotaciones en  $L^2(X)$  para la  $\rho$ -variación y no menos importante es que como corolario de este resultado logra la acotación en  $L^2(X)$  del semigrupo de Poisson clásico, ya que lo analiza como una martingala, generando así uno de los primeros puentes entre análisis armónico y la teoría de probabilidad.

Previo a los trabajos que Bourgain realizó para martingalas, Burkholder en el año 1973 en [9], prueba resultados de acotación de la función cuadrado. Las pruebas y comentarios de Burkholder permitieron a John et al en [19] demostrar resultados de acotación del operador  $\rho$ -variación asociada a promedios ergódicos y martingalas.

Según se puede leer en algunos trabajos, quien reconoce y comenta entre sus colegas, que el operador  $\rho$ -variación para  $\rho = 2$  tiene mal comportamiento ha sido Burkholder. No debemos dejar de comentar que también Bourgain reconoce que en el caso de martingalas para  $\rho = 2$  la variación no está acotada en  $L^2(X)$ . En los trabajos [1] y [11] los autores proporcionan múltiples ejemplos, en distintos contextos, donde dan cuenta del mal comportamiento que tiene la variación para  $\rho \leq 2$ . Por lo tanto es usual considerar la variación sólo para los casos en que  $\rho > 2$ . En este sentido ha sido P. Jones quien dice que el caso  $\rho = 2$  de la variación puede ser reemplazado con el estudio de la oscilación, que es un operador más chico que la 2-variación.

## 2. Propiedades elementales

En estas notas, daremos consignas sencillas para obtener algunas propiedades interesantes de estos operadores y que hacen relevante su estudio en la teoría de convergencia de operadores.

En primer lugar no es difícil ver que ambos operadores definen seminormas sobre la familia de operadores  $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ .

Como primera observación debemos remarcar que en la definición de la  $\rho$ -variación se está considerando supremos sobre una gran familia de sucesiones y por lo tanto no resulta evidente que defina una función medible. Así que se opera de la siguiente manera, primero se restringe la familia de sucesiones a un conjunto finito, se prueba que las desigualdades en norma son independientes de este conjunto y luego se amplía el conjunto, obteniendo los resultados cuando  $t_i$  pertenece a un conjunto denso numerable, los resultados finales siguen por propiedades de continuidad de los operadores involucrados.

Una pregunta natural que surge es: cuál es la relación que hay entre los operadores variación y oscilación y cómo se comporta la variación a medida que modificamos el parámetro  $\rho$ . La siguiente propiedad proporciona una respuesta a estos interrogantes.

**Propiedad 1.** Si  $1 \leq \rho \leq \alpha < \infty$  luego para cualquier familia de operadores  $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  y cualquier  $f$  se tiene que  $\|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\alpha} \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_\rho}$ , y  $\|T_t f(x)\|_0 \leq \|T_t f(x)\|_{\mathcal{V}_2}$ .

La primera desigualdad sigue simplemente por resultados de inclusión entre los espacios de Lebesgue discretos  $l_p$ . En referencia a la última desigualdad el lado derecho es mucho más grande, el siguiente ejemplo discreto lo muestra claramente. Sea  $n_k$  una sucesión fija, consideremos la sucesión numérica  $x_n = 1$  para  $n_{k-1} \leq n < n_k$  y con  $k$  par y  $x_n = 0$  para  $n_{k-1} \leq n < n_k$  y con  $k$  impar. No es difícil ver que  $\|x_n\|_0 = 0$  pero  $\|x_n\|_{\mathcal{V}_2} = \infty$ .

### Observaciones:

- El resultado anterior nos conduce a preguntarnos cuál es el más chico valor de  $\rho$  para el cual la  $\rho$ -variación es finita. Pero como hemos mencionado anteriormente, en el rango  $0 < \rho \leq 2$  la variación tiene mal comportamiento, por lo tanto se considera el operador  $\rho$ -variación para el rango  $\rho > 2$ .
- En general uno no puede concluir resultados de convergencia de la familia de operadores conociendo acotaciones de funciones tipo cuadrado como (1.1) para  $\rho = 2$ . Este es uno de los motivos por los cuales se estudian estos operadores un poco mas complicados. Es posible mostrar la existencia de una sucesión de operadores y una función en  $L^2$  para los cuales la sucesión  $T_k f$  no converge, sin embargo para una sucesión fija la función cuadrado es un operador acotado en  $L^2$  (ver ejemplo en [19]). Muy por el contrario es posible probar que la finitud de la  $\rho$ -variación en un punto proporciona convergencia de la sucesión de operadores en ese punto expresado en la siguiente propiedad.

**Propiedad 2.** Si para algún  $\rho < \infty$  tenemos que  $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) < \infty$  en un punto  $x$  luego  $T_k f(x)$  converge en  $x$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Esta interesante propiedad someramente se puede ver de la siguiente manera: suponiendo que la convergencia no es cierta, luego existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\limsup T_k f(x) - \liminf T_k f(x) > \epsilon$ . Así construimos una sucesión  $\{n_k\}$  para la cual la variación sea infinita como sigue. Seleccionamos  $n_1$  tal que  $T_{n_1} f(x)$  este cerca de  $\limsup T_k f(x)$ , es decir tal que  $|\limsup T_k f(x) - T_{n_1} f(x)| < \frac{\epsilon}{4}$ . Luego elegimos  $n_2 > n_1$  tal que  $|\liminf T_k f(x) - T_{n_2} f(x)| < \frac{\epsilon}{4}$ . Siguiendo sea  $n_3 > n_2$  tal que  $T_{n_3} f(x)$  esté cerca de  $\limsup T_k f(x)$  y de esta manera construimos la sucesión,  $|T_{n_k} f(x) - T_{n_{k+1}} f(x)| > \frac{\epsilon}{2}$  para cada  $k \geq 1$ . De este modo  $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) \geq (\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{\epsilon}{2})^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \infty$ .

### Observaciones:

- Esta propiedad nos permite poner en valor el estudio de acotación en espacios de Lebesgue de la  $\rho$ -variación por su estrecha relación con la convergencia puntual de la familia de operadores involucrados.
- La recíproca de la propiedad anterior puede no ser cierta. Es posible definir una sucesión de operadores convergente para toda  $f \in L^p$  tal que los operadores oscilación y variación de esta familia sean puntualmente infinitos. En efecto sean los operadores  $T_k f(x) = \frac{(-1)^k}{\ln k} f(x)$ . Es claro que  $T_k f(x) \rightarrow 0$  en casi todo punto para toda  $f \in L^p$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ . Sin embargo para  $\rho > 0$  el operador  $\rho$ -variación y oscilación es infinito si  $f(x) \neq 0$ , pues  $|T_k f(x) - T_{k+1} f(x)| \simeq \frac{2}{\ln k} |f(x)|$  (acá  $n_k = k$  para

$k = 1, 2, \dots$ ). Elevando a la potencia  $\rho$  y sumando, vemos que en cualquier punto  $x$  en donde  $f(x) \neq 0$  se tiene que  $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) = \infty$ , para cualquier  $0 < \rho < \infty$ .

En el estudio de las acotaciones puntuales de una familia de operadores es bien sabido que el trabajo sobre el operador maximal es una herramienta usual a considerar. El siguiente resultado muestra que el operador  $\rho$ -variación controla el operador maximal.

**Propiedad 3.** *El operador  $\rho$ -variación acota puntualmente al operador maximal  $T^*f(x) = \sup_k |T_k f(x)|$ .*

Esta propiedad surge de considerar  $n(x)$  tal que  $|T^*f(x)| < 2|T_{n(x)}f(x)|$ , así

$$\begin{aligned} |T^*f(x)| &< 2|T_{n(x)}f(x) - T_1f(x) + T_1f(x)| \\ &\leq 2|T_{n(x)}f(x) - T_1f(x)| + 2|T_1f(x)|, \end{aligned}$$

de esta manera si seleccionamos una sucesión  $n_k$  tal que  $n_1 = 1$  y  $n_2 = n(x)$  obtenemos que  $|T_{n(x)}f(x) - T_1f(x)|$  es uno de los términos de la suma en la definición de la  $\rho$ -variación. Por lo tanto  $|T^*f(x)| \leq 2\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x) + 2|T_1f(x)|$ .

Como ha sido resaltado, si la familia de operadores es convergente, la variación y oscilación aportan información sobre cómo es el comportamiento de la familia de operadores en su convergencia. En [19], [18] los autores han estudiado además la amplitud de los saltos que tiene la familia de operadores, más particularmente han definido el siguiente operador, para  $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \Lambda(T_t, f, \lambda, x) &= \sup\{n > 0 : \text{existe } t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \dots \leq s_n < t_n, \\ &\text{tal que } |T_{t_i}f(x) - T_{s_i}f(x)| > \lambda, \quad i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

denominado operador salto. Este operador mide el número de  $\lambda$ -saltos que da la familia  $T_t f$ . Claramente, si la familia es convergente el número de  $\lambda$ -saltos debe ser finita en casi todo punto. El tamaño de este operador nos da información acerca de cómo la familia  $T_t f$  converge.

**Propiedad 4.** *Si para cada elección de  $\lambda > 0$ , el operador  $\lambda$ -salto es finito en casi todo punto luego la familia de operadores  $T_t f$  converge en casi todo punto.*

Esta propiedad sigue ya que la finitud del operador  $\lambda$ -salto implica que para cualquier  $\lambda$  dado, los términos de la sucesión  $T_t f(x)$  pueden diferir en más que  $\lambda$  sólo un número finito de veces. Luego la convergencia sale usando el criterio de Cauchy.

**Propiedad 5.** *El operador  $\lambda$ -salto esta controlado por el operador  $\rho$ -variación, mas concretamente*

$$\Lambda(T_t, f, \lambda, x)^{\frac{1}{\rho}} \leq \frac{1}{\lambda} \mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})f(x). \quad (1.3)$$

Esta acotación resulta observando que si consideramos la sucesión  $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_n, t_n$  de la definición del operador  $\lambda$ -salto como una parte de la sucesión  $n_k$  que se toma para definir el operador  $\rho$ -variación, luego cada término de la suma asociada con esta parte está acotada por arriba por  $\lambda$  y tenemos al menos  $\Lambda(T_t, f, \lambda, x)$  de dichos términos.

### 3. Familia de operadores

Anteriormente hemos hecho referencia a diferentes familias de operadores como promedios ergódicos y martingalas. Estos serán algunos de los ejemplos estudiados en la bibliografía y que a continuación mencionamos y los resultados conocidos sobre ellas en referencia a la oscilación y  $\rho$ -variación.

## Martingalas

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de probabilidad. Para facilitar la escritura daremos la definición diádica de esta familia de operadores. Para  $f \in L^1(X)$ , consideremos la familia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de promedios sobre intervalos diádicos definidos como sigue,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( 2^n \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t) dt \right) \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(x), \quad (1.4)$$

conocida como la martingala diádica. Si tomamos  $\mathcal{T} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , el operador  $\rho$ -variación  $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$  es acotado en  $L^p(X)$  para  $\rho > 2$  y también es acotado de  $L^1(X)$  en el espacio  $L^1(X)$ -débil. Como referencias en donde encontrar sus demostraciones podemos citar [21] [18], en donde la descomposición de Calderón-Zygmund adaptada a este contexto es central.

Las martingalas, debemos resaltar, son la clave para demostrar resultados sobre la  $\rho$ -variación para familias de operadores que parecen no tener ninguna relación con ellas.

## Promedios ergódicos

Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de probabilidad y  $\tau : X \rightarrow X$  una transformación medible, invertible y que preserve la medida. Para  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  consideremos los promedios ergódicos,

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\tau^j f)(x). \quad (1.5)$$

Si tomamos  $\mathcal{T} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , en [19] los autores prueban que los operadores oscilación  $\mathcal{O}(\mathcal{T})$  y  $\rho$ -variación  $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{T})$  son acotados en  $L^p(X)$  para  $1 < p < \infty$  y en los extremos prueban que mapea  $L^1(X)$  en el espacio  $L^1(X)$ -débil y en el otro extremo mapean  $L^\infty(X)$  en  $BMO$ .

Los resultados en este trabajo han sido motivados por acotaciones similares para el caso de martingalas. La herramienta central es establecer la conexión entre martingalas y promedios ergódicos y el operador de diferenciación es el que permite este nexo.

## Integrales singulares

El estudio de las integrales singulares se encuentra estrechamente ligado al estudio de las ecuaciones diferenciales y es uno de los operadores más importantes del análisis armónico. Las truncaciones de la transformada de Hilbert generan una familia de operadores como sigue

$$H_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

En el trabajo [11] los autores obtienen, haciendo uso de los resultados de Bourgain, la acotación en  $L^p(\mathbb{R})$  para  $1 < p < \infty$  y la acotación débil en el extremo  $p = 1$ , para los operadores oscilación y  $\rho$ -variación asociados a esta familia  $\{H_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ .

En el caso  $n$ -dimensional fueron los mismos autores quienes en ([12]) extienden resultados de acotación a truncaciones de integrales singulares. Concretamente la familia de operadores será la siguiente: para un intervalo  $I \subset (0, \infty)$ , se considera el anillo  $A_I = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \in I\}$ . un núcleo que satisface las condiciones de tamaño y regularidad conocidas en la teoría de integrales singulares, y también otras condiciones sobre la cáscara

de la esfera  $n$ -dimensional, para mayor precisión ver ([12]). Consideran las truncaciones definidas de manera formal como

$$K_I f(x) = \int_{A_I} K(y) f(x-y) dy.$$

$\mathcal{K} = \{K_{I_i}\}$  donde  $I_i$  generan una partición del  $(0, \infty)$ . El objetivo es estudiar acotaciones de la variación  $\mathcal{V}_\rho(\mathcal{K})$  y la oscilación  $\mathcal{O}(\mathcal{K})$  para esta familia de operadores. La clave radica en dividir el núcleo en dos partes, en una de ellas la analizan haciendo uso de desigualdades a valores vectoriales y en la otra transfieren los resultados conocidos en una dimensión. En el caso de la acotación débil la herramienta principal es la descomposición de Calderón-Zygmund.

En cuanto a acotaciones en espacios de Lebesgue con pesos quienes primero trabajaron sobre estos operadores, en el caso euclídeo e independiente de la dimensión fueron Gillespie y Torrea en [16] donde obtienen acotación en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $1 < p < \infty$  con pesos potencia, haciendo uso nuevamente de desigualdades a valores vectoriales.

Resultados para pesos más generales fueron analizados en [22]. En este trabajo prueban que los operadores  $\rho$ -variación y oscilación son acotados en  $L^p(w)$  para  $1 < p < \infty$  y poseen acotación débil con pesos si  $p = 1$ , cuando el peso  $w$  pertenece a la clase de Muckenhoupt  $A_p$ , para  $1 \leq p < \infty$ . Si la integral singular es la transformada de Hilbert, similares resultados con pesos  $A_p$  fueron previamente obtenidos en [14].

## Semigrupos de operadores

Las integrales singulares pueden pensarse como operadores en un contexto más general de semigrupos.

De manera formal dado  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida. Una familia  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  de operadores, que satisfacen  $T_t T_s = T_{s+t}$  y  $T_0 = I$ ,  $T_t$  son continuos en el sentido que  $\lim_{t \rightarrow 0} T_t f = f$  en  $L^2(X)$ , son operadores acotados en  $L^p(X)$ , autoadjuntos en  $L^2(X)$  es llamada un semigrupo.

En [20], los autores obtienen resultados de acotación fuerte en  $L^p(X)$  para los operadores oscilación y  $\rho$ -variación asociados a esta familia cuando el semigrupo satisface además que  $T_t(1) = 1$ . Estos semigrupos son llamados semigrupos de difusión simétricos.

Múltiples estudios de acotación de los operadores oscilación y  $\rho$ -variación, para familias asociadas a semigrupos han sido estudiadas en los últimos años, tanto sea para semigrupos de difusión simétricos como otros que no lo son. Cada semigrupo proviene de un particular operador diferencial como es el caso de los operadores de Laplace, Hermite, Ornstein-Uhlenbeck, Laguerre, Schrodinger, Bessel entre otros. Para cada operador diferencial podemos asociar el semigrupo del calor, el semigrupo de Poisson, integrales singulares, potenciales de Riesz, etc y por lo tanto resulta de interés analizar su acotación y la de los operadores oscilación y  $\rho$ -variación cuando se tiene una familia monoparamétrica de operadores.

Entre los artículos que estudian acotaciones de la  $\rho$ -variación y la oscilación para diferentes familias asociadas a estos semigrupos podemos citar [2], [4], [3], [5], [6] [13], [14], [17] y las referencias dentro de ellas.

Para cada contexto las técnicas de trabajo varían, no obstante los resultados clásicos del análisis armónico están siempre presentes. En las citas dadas previamente se pueden ver las herramientas utilizadas para cada uno de los semigrupos. Algunas de ellas siguen las

ideas de los trabajos que las preceden y en otras realizan nuevos e interesantes aportes, ampliando así la mochila de herramientas de trabajo que todos llevamos a la hora de iniciar un nuevo estudio.

Para finalizar y de manera personal quiero comentar que he tenido el placer de trabajar y aprender sobre estos temas con varios de los investigadores mencionados anteriormente, en especial con José Luis Torrea y Jorge Betancor a quienes agradezco las enseñanzas recibidas en todos esos años de trabajo conjunto.

Quiero agradecer también a Victoria Paternostro por invitarme a participar en esta sección del Noticiero de la UMA con esta pequeña contribución y también a Luis Nowak por leer el preliminar y aportar ideas.

## Referencias

- [1] M. Akcoglu, R. L. Jones, and P. Schwartz, *Variation in probability, ergodic theory and analysis*, Illinois J. Math. 42 (1998), 154-177.
- [2] V. Almeida, J. J. Betancor, J. C. Fariña, L. Rodriguez-Mesa, *Variation and oscillation operators on weighted Morrey-Campanato spaces in the Schrödinger setting*, Rev. de la UMA, Vol. 66, No. 1, (2023), 1-34
- [3] J.J. Betancor, R. Crescimbeni and J.L. Torrea, *The  $\rho$ -variation of the heat semigroup in the Hermite setting. Behaviour in  $L^\infty$* , Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (serie 2) Vol. 54, Issue 03 (2011) 569-585.
- [4] J.J. Betancor, R. Crescimbeni and J.L. Torrea, *Oscillation and variation of the Laguerre heat and Poisson semigroups and of the Riesz transforms*, Acta Mathematica Scientia Vol 32 Issue 3, (2012) 907-928.
- [5] J.J. Betancor, E. D. Dalmasso, P. Quijano, *Variation operators associated with semigroups generated by Hardy operators involving fractional Laplacians in a half space*, arXiv:2310.03540v2.(2023).
- [6] J.J. Betancor, J.C. Fariña, E. Harboure and L. Rodriguez Mesa,  *$L^p$ -boundedness properties of variation operators in the Schrödinger setting*, Rev. Math. Complut. (2013) 26, 485-534.
- [7] J. Bourgain. *On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the positive integers*. Israel J. Math. 61 (1988), 39-72.
- [8] J. Bourgain. *Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets*. Publications Mathematiques, Institut des Hautes Etudes Scientifiques 69 (1989), 5-45.
- [9] D. L. Burkholder. *Distribution function inequalities for martingales* . Ann. Prob. 1 (1973), 19-42.
- [10] D. L. Burkholder, R. F. Gundy and M. L. Silverstein, *Maximal Function Characterization of the Class  $H^p$* , Transactions of the AMS, Vol. 157 (Jun., 1971), pp. 137-153

- [11] J. Campbell, R. Jones, K. Reinhold, and M. Wierdl, *Oscillation and Variation for the Hilbert Transform*, Duke Math. J. 105 (2000), 59-83.
- [12] J. Campbell, R. Jones, K. Reinhold, and M. Wierdl, *Oscillation and variation for singular integral in higher dimensions*, Transactions of the AMS Volume 355, Number 5, (2002) 2115-2137.
- [13] R. Crescimbeni, R. A. Macías, T. Menárguez, J. L. Torrea and B. Viviani, *The  $\rho$ -variation as an operator between maximal operator and singular integrals*, J. Evol. Equ. 9 (2009), 81-102.
- [14] R. Crescimbeni, F. J. Martín Reyes, A. de la Torre, J. L. Torrea, *The  $\rho$ -variation of the Hermitian Riesz Transform*, Acta Mathematica Sinica, English Series, (2010), Vol. 26, No. 10, pp. 1827-1838.
- [15] V. F. Gaposhkin. *Individual ergodic theorem for normal operators on  $L^2$* . Funct. Anal. Appl. 15 (1981), 14-18.
- [16] T.A. Gillespie and J.L. Torrea, *Dimension free estimates for the oscillation of Riesz transforms*, Israel J. Math. 141 (2004), 125-144.
- [17] E. Harboure, R. A. Macías, M. T. Menárguez and J. L. Torrea, *Oscillation and variation for the Gaussian Riesz transforms and Poisson integral*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 135 (2005), 85-104.
- [18] R. Jones, *Variation inequalities for singular integrals and related operators* , Contemporary Mathematics Volume 411, ( 2006), 89-121.
- [19] R. Jones, R. Kaufmann, J. Rosenblatt, and M. Wierdl, *Oscillation in ergodic theory*, Ergodic Theory Dynam. Systems 18 (1998), 889-935.
- [20] R. Jones and K. Reinhold, *Oscillation and variation inequalities for convolution powers*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2001), 21, 1809-1829.
- [21] D. Lepingle, *La variation d'ordre  $p$  des semi-martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 36 (1976), 295-316.
- [22] T. Ma, J. L. Torrea and Q. Xu, *Weighted variation inequalities for differential operators and singular integrals in higher dimensions*, Science China Mathematics, 60(8), (2017) 1419-1442.
- [23] E. M. Stein. *The development of square functions in the work of A. Zygmund*, Bulletin (New Series) of the AMS, Volume 7, Number 2, (1982)
- [24] H. White, *The pointwise ergodic theorem and related analytic inequalities*, Master's Thesis, University of North Carolina, Chapel Hill, NC, (1989).