NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Educación Matemática

Cognición en Matemática. Concepciones estudiantiles sobre los números reales

Virginia Montoro

Universidad Nacional del Comahue (Bariloche)

IPEHCS (CONICET -UNCo)

La comprensión en Matemática

Una idea arraigada en la comunidad Matemática y en la de Educación Matemática es que para hacer matemática y para aprenderla se deben comprender los conceptos, métodos, procedimientos, relaciones y formas de representación de esta ciencia.

Partimos de la idea de que, al interactuar con el mundo, participando de prácticas socioculturales en ámbitos cotidianos, académicos o profesionales, las personas generan conocimientos y aprenden. Estos procesos se representan internamente y esas representaciones internas están estructuradas de alguna manera. Las Matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones y el grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de esas conexiones (Hiebert y Carpenter, 1992; Sierpinska, 1994).

Dado que los conceptos matemáticos son abstractos e inaccesibles a los sentidos, solo podemos entenderlos a través de representaciones como gráficos o símbolos. Al representar una función o escribir un número, usamos signos que nos permiten interactuar y comunicar ideas matemáticas. Comprender no se limita a ejecutar procesos y aplicar fórmulas, es un proceso constructivo que vincula acciones sobre objetos conocidos con representaciones internas, generando estructuras mentales asociadas a los signos matemáticos (Sfard, 1991; 2008). En otras palabras, las personas comprenden matemáticas al reflexionar sobre sus concepciones, relacionarlas y usarlas para resolver problemas mediante representaciones externas. Godino (2000) plantea que la comprensión debe incluir tanto esta perspectiva psicológica (experiencia mental y conexiones internas) como también una perspectiva antropológica (relación entre significados personales e institucionales).

Concluimos que comprender matemática va más allá de la lectura o escritura de axiomas, definiciones, teoremas y de la aplicación de algoritmos. Implica darle sentido

a la información, conectándola con otros conocimientos e ideas. Esto significa explicarla, relacionarla con experiencias previas, integrar diferentes formas de visualizar y representar un concepto, relacionarlo con otros conceptos y usar este conocimiento para crear nuevos aprendizajes o resolver problemas. Todo esto en diversas situaciones y en relación con contextos institucionales.

Las concepciones estudiantiles

Desde la década 1970-1980, las teorías del aprendizaje enfatizan el estudio de las concepciones de los y las estudiantes como puntos de partida y referencia permanente de la enseñanza orientada hacia la construcción de aprendizajes significativos (Ausubel et al., 1978/83). Consideran fundamental interactuar con las ideas previas de los y las aprendices para enriquecerlas o modificarlas. En este sentido, Vygotsky (1973) señaló que todo aprendizaje tiene una prehistoria, mientras que Bachelard (1938/1987) afirmó que conocer implica enfrentarse a conocimientos previos.

Las concepciones estudiantiles se originan en diversos factores, como el razonamiento humano habitual, la cultura y las experiencias educativas y a menudo interfieren con la adquisición de conocimientos académicos. Funcionan tanto como herramientas para interpretar la realidad como barreras que pueden dificultar la adopción de nuevas perspectivas (Pozo, 2014; Vosniadou, 2008).

Piaget fue un precursor en el estudio de estas concepciones en distintos dominios, incluyendo los números y la geometría (Piaget, 1952; Piaget e Inhelder, 1969). Desde los años ochenta, la investigación ha dejado de verlas como manifestaciones de estadios evolutivos y ha comenzado a analizarlas en función del nivel de pericia del sujeto en un dominio específico y del contexto de la tarea (Pozo, 2014). Este enfoque dio origen a investigaciones sobre las concepciones del estudiantado en distintos campos de conocimiento en el nivel secundario y universitario, en particular en contenidos matemáticos específicos (Bergé, 2008; Montoro, 2005; Voskoglou y Kosyvas, 2012).

Lejos de ser arbitrarias o casuales, las concepciones estudiantiles poseen cierta sistematicidad, ya que intentan dar sentido al mundo y se integran al “sentido común” a través del cual los sujetos interactúan con su entorno y, por esta razón, suelen ser difíciles de modificar (Pozo, 2014). No obstante, si bien estas concepciones son persistentes, pueden cambiar a través de la práctica educativa en nuevos contextos. Conocer las concepciones de los y las estudiantes permite a los y las docentes contar con herramientas que favorezcan el aprendizaje.

La dualidad conceptos – concepciones

Tratándose de Educación Matemática, el tratamiento de las concepciones nos remite rápidamente al término concepto, problemático en sí mismo. White (1988) considera que el término concepto es usado de dos maneras distintas, por un lado, designando un sistema de clasificación que permite ubicar una instancia dentro de una clase y, por otro, como todo conocimiento que un sujeto asocia al nombre (del concepto). En cuanto a la idea de concepción, piensa que se trata de un sistema de explicación, más complejo y difícil de definir. Estas dos formas de entendimiento se pueden ver como complementarias ya que la noción de concepto se encuentra muy próxima a la de concepción, por cuanto todo el conocimiento asociado a un nombre no deja de ser una explicación cuando se aplica a la interpretación de la realidad.

En palabras de Sfard (2008) entendemos el concepto como una palabra junto con sus usos discursivos, entendida como dicha por los miembros competentes de la comunidad de discurso, mientras que la concepción es la versión individual del concepto. El término concepción refiere a la manera especial en que una persona emplea la palabra en su discurso y resuelve situaciones en las que el respectivo concepto está involucrado.

Estudios empíricos ponen de manifiesto que las personas emplean diversos tipos de representaciones con relación a los fenómenos a los que refiere un concepto, dependiendo de su nivel de conocimiento (expertos y novatos establecen distintas representaciones de los conceptos) y del concepto a representar (no es lo mismo representar “silla”, “libertad” o “circunferencia”) (Pozo, 2014; Sfard, 2008). Como indica Howard (1987), la formación de conceptos en contextos cotidianos es relativamente concreta y basada en la percepción, mientras que en ámbitos académicos las representaciones tienden a ser más abstractas y a establecer relaciones con otros conceptos de la disciplina, en busca de explicaciones pertinentes.

Conocimiento personal y conocimiento académico en investigación en Educación Matemática

En investigación en Educación Matemática, diversos/as autores/as se han ocupado de establecer las relaciones entre el conocimiento personal (concepciones) y el conocimiento académico, legitimado y objetivado por una comunidad de especialistas (concepto) destacando que en muchas situaciones se registran relevantes brechas entre ambos, que en caso de no ser conocidas y trabajadas deliberadamente pueden conducir al fracaso de la enseñanza.

Desde la escuela holandesa de Didáctica de la Matemática, Freudenthal (1983) distingue explícitamente entre concepto y objeto mental, llamando objeto mental al concepto que una persona tiene de un determinado objeto matemático, es decir el campo semántico personal. Esta idea incluye la posibilidad de que las definiciones formales de los conceptos formen parte de los objetos mentales que construimos, sin que esto sea necesariamente así. Aún cuando la definición matemática forme parte del objeto mental, no lo sustituye.

Brousseau (1983), en la Didáctica de la Matemática francesa, señala que todos/as generamos concepciones sobre determinadas nociones, que en algunas ocasiones se revelan falsas, insuficientes, ineficaces para la resolución de situaciones y problemas, lo que puede provocar errores repetitivos y resistentes que se conviertan en obstáculos para nuevas comprensiones. En este sentido, la manifestación de obstáculos en el aprendizaje está caracterizada por cierto tipo de conocimiento y no ausencia de éste.

Por otra parte, Tall y Vinner (1981) distinguen entre concepto e imagen conceptual (o esquema conceptual). El concepto es lo que se desprende de una definición matemática, mientras que la imagen conceptual corresponde al concepto en la mente individual, es el producto de los procesos de formación del concepto en la mente. Para un concepto dado, desarrollamos una imagen conceptual que comprende toda la estructura cognitiva en la mente del individuo asociada a tal concepto. Esta puede no ser globalmente coherente, diferenciarse en ciertos aspectos de la definición formal del concepto y contener factores que causen conflicto cognitivo, asimismo se amplía y cambia con la experiencia y reflexión y las conexiones usadas en una ocasión pueden ser diferentes de aquellas evocadas en otra (Tall, 2013).

Desde la perspectiva de la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), un individuo desarrolla su comprensión de conceptos matemáticos construyendo y utilizando determinadas estructuras mentales. La construcción de estructuras asociadas a un concepto particular se relaciona íntimamente con la concepción que un individuo alcanza sobre dicho concepto. Una concepción es intrapersonal y se desarrolla como resultado de una actividad reflexiva. Dicho desarrollo no es lineal, hay un ir y venir entre diferentes etapas en la construcción del conocimiento (Arnon et al., 2014).

En su estudio sobre la comprensión Matemática, Sfard (2008) establece la diferencia, entre concepto como el constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento de la disciplina y concepción como la idea del concepto que vive en la mente humana, que depende de la experiencia personal y está sujeta a cambios. Tenemos, por un lado, el conocimiento matemático que se comparte socialmente y que está sujeto a transformaciones para poder ubicarlo como objeto de enseñanza y, por el otro, el conocimiento subjetivo que los y las estudiantes relacionan con el conocimiento oficial.

Estudiantes pensando los números reales

Mostraremos un sintético panorama de las concepciones que estudiantes de los últimos años de la escuela secundaria y de universidad construyen sobre los números reales.

Los números en los distintos niveles de estudio

En los primeros años de la escuela primaria, niños y niñas conocen los números naturales. Aprenden que el 1 es el primer número y que todo número natural tienen un siguiente, por lo que podrán intuir que los números (naturales) son infinitos. Conocerán también en forma intuitiva que entre dos números naturales consecutivos no hay otro número natural y el orden de los números naturales es tal que cuando tengamos varios números naturales uno de ellos será el menor.

Los números enteros se introducen, en el tercer ciclo de la escuela primaria y se formalizan, en los primeros cursos de la escuela secundaria, a partir de la necesidad de ampliar el conjunto de números naturales con los números negativos que aparecen en situaciones concretas y permiten extender la recta numérica. Al mismo tiempo el 0 (cero) toma sentido en esta como número.

Al adentrarse en los estudios secundarios, la enseñanza propone profundizar la comprensión y el uso de los números racionales y hacia el final de este período se espera que los y las estudiantes comprendan los números racionales y los números reales, manejen el sistema de representación decimal, puedan ordenarlos, representarlos sobre la recta numérica y usarlos para resolver problemas.

La diferenciación de número racional y número irracional es esencial para la construcción del concepto de número real, que se realiza en la escolaridad extendiendo el campo numérico desde el conjunto de números racionales, propios de la matemática escolar, hacia el de números reales ámbito de la matemática avanzada.

En los primeros cursos de matemáticas universitarias, frecuentemente se trabaja con la noción de número real, como si fuese un contenido ya naturalizado en la escuela secundaria, sin proponer un estudio deliberado y formal al respecto.

De lo discreto a lo denso

El pasaje de los números naturales a los enteros con que se enfrentan los y las estudiantes hacia el final de la escuela primaria, presenta dificultades epistemológicas y cognitivas importantes, relacionadas generalmente con los números negativos. El obstáculo epistemológico (Brousseau, 1983) surge, en general, al considerar el número como una cantidad referida al mundo concreto.

No abordaremos aquí las concepciones sobre números negativos, ya que en los últimos años de secundaria y en la universidad los y las estudiantes suelen haber ampliado su campo numérico a los racionales y reales. Sin embargo, diversas investigaciones muestran que en los primeros años de secundaria el alumnado suele mantener aún concepciones propias de los números naturales, aplicándolas a los enteros. Esto incluye ver los números como cantidades concretas y entender la suma como aumento, la resta como disminución, y la multiplicación y división dentro del marco de los naturales (Bruno, 1997; Vergnaud, 1982).

Luego de los números enteros, el currículo escolar contempla la enseñanza de los racionales como fracciones de enteros o como decimales. A veces se enseñan las fracciones y los decimales como tipos distintos de números, lo que puede, en ciertos casos, llevar a que los y las estudiantes terminando la secundaria y comenzando la universidad consideren que diferentes representaciones de un mismo número racional corresponden a números distintos. Más aún, pueden llegar a pensar que los decimales y las fracciones son subconjuntos disjuntos dentro del conjunto de números racionales (Montoro y Ferrero, 2022; O'Connor, 2001; Vamvakoussi y Vosniadou, 2010).

El acto de contar es el primer acercamiento a una representación del número natural, de lo discreto. Esta representación puede persistir, de modo que, en problemas relacionados con fracciones o decimales, se considere propiedades de los números naturales para resolverlos. De hecho, una de las principales dificultades para comprender los números racionales puede ser la transferencia (incorrecta) de las propiedades de los números naturales a los números racionales (Ni y Zhou, 2005; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004).

Fischbein et al. (1995) y Tirosh et al. (1998), encontraron que estudiantes de secundaria y de profesorado de educación primaria consideran a los enteros como modelo de número o identifican al número con su representación y no conocen los irracionales. En forma similar, Montoro y Ferrero (2022) muestran que, estudiantes con menores estudios en matemática han naturalizado, en la secundaria sólo a los enteros como números, mostrando gran inseguridad al enfrentarse con el orden denso propio de racionales y reales.

Una idea muy difundida entre estudiantes de los últimos años de la secundaria y comienzo de la universidad es la de pensar a los números como los decimales finitos, con una discretitud explícita. Esta concepción consiste en identificar al número real con el número decimal (finito) y discreto. Pareciera que en su comprensión hay un corrimiento de los enteros a los décimos o centésimos (Montoro y Ferrero, 2022). Puede observarse que estos/as estudiantes trasladan a los racionales el tipo de orden de los naturales (un racional puede tener un siguiente) y no reconocen los irracionales, lo que concuerda con lo encontrado por Malara (2001); Merenluoto y Lehtinen (2002) y Palacios-Amaya et al. (2018).

Concepciones de los números reales como unión de los racionales e irracionales

Las expectativas respecto a que al ingresar a la universidad la noción de número real sea una noción disponible en el estudiantado, frecuentemente no son satisfechas y una cantidad importante de estudiantes recorren esta etapa de transición entre la escuela secundaria y

la universidad sin una comprensión cabal del número real (Artigue et al., 1995; Tirosh et al., 1998; Zazkis y Sirotic, 2010; Montoro, 2023). Algunos de los estudios en pensamiento numérico muestran que los y las estudiantes tienden a extrapolar las propiedades del número natural no solo, como dijimos, a los racionales sino también a los reales (Merenluoto y Lehtinen (2002); Vamvakoussi y Vosniadou, 2010).

Estudios sobre las concepciones del número irracional han evidenciado que maestros/as de escuela primaria, incluso aquellos con estudios universitarios, tienen dificultades para reconocer si un número es racional o irracional. Asimismo, se ha observado la misma dificultad en estudiantes en transición de la secundaria a la universidad. Incluso quienes han finalizado la educación secundaria y cursan los primeros años universitarios, aunque conocen las definiciones y características de los números irracionales, suelen fracasar en tareas que requieren un uso flexible de sus diferentes representaciones. Además, muchos/as de estos/as estudiantes tienden a confundir los números irracionales con sus aproximaciones decimales y a creer que la irracionalidad de un número depende únicamente de su representación decimal (Fischbein et al.,1995; Peled y Hershkovitz, 1999; Zazkis y Sirotic, 2010). Al respecto Montoro (2023) encontró que una amplia mayoría de estudiantes de últimos años de la secundaria y de la universidad sin estudios formales de los números reales han naturalizado a los números reales identificándolos con los racionales, generalmente como decimales y que los irracionales son considerados por estos/as estudiantes como unos pocos números raros.

Otra concepción un poco más profunda de los números reales generalmente presente en estudiantes a nivel universitario sin especialidad en Matemática condice con una concepción de los números reales identificándolos con los racionales infinito-potencialmente densos (Montoro, 2023; Peled y Hershkovitz, 1999). Esta visión de la densidad como potencialmente infinita coincide con que frecuentemente los jóvenes conciben al infinito (en forma intuitiva) como potencial, es decir algo que puede seguir sucediendo siempre o un proceso sin fin (Fischbein et al., 1979; Monaghan, 2001).

La profundidad del conocimiento matemático juega un papel importante para la mejor comprensión de los números reales, aun en las nociones más básicas, como son la diferenciación de racionales e irracionales, orden y densidad. Al respecto Voskoglou y Kosyvas (2012) revelaron que estudiantes de un instituto tecnológico de pregrado, que utilizan las matemáticas como herramienta para estudiar y comprender mejor la ciencia, mostraron una importante superioridad de respuestas correctas con respecto a las respuestas de las y los estudiantes de secundaria. Montoro y Ferrero (2022) da cuenta que solo, unos pocos estudiantes avanzados/as de Matemática, han construido concepciones del número como elemento de un conjunto numérico correctamente diferenciado brindando una descripción de los irracionales con características necesarias y suficientes y una visión infinito-actual de la densidad. El infinito actual o matemático es aquel en que los infinitos elementos existen simultáneamente, son concebidos como una unidad.

La necesidad matemática de los irracionales

Juntamente con la comprensión incompleta de los números racionales, existen otras dificultades cognitivas y epistemológicas que complican aún más la comprensión de los números reales. Entre ellas se encuentran la completitud, la inconmensurabilidad de los irracionales y la no-numerabilidad. Todas estas cuestiones están estrechamente vinculadas a la noción de infinito matemático, propia de un pensamiento matemático avanzado y que requiere, para su comprensión, de contextos educativos que fomenten la reflexión

matemática y de un estudio específico. Esto pone en evidencia la relación profunda (y ya manifestada en la historia) entre los números reales y el infinito matemático (Artigue et al., 1995; Bergé, 2008; Fischbein et al., 1994; Sierpinska, 1985; Tall, 2001).

Las generalizadas dificultades del estudiantado de secundaria y universidad en este campo podrían, además, atribuirse a que los números irracionales fueron conceptualizados en la matemática respondiendo a necesidades netamente teóricas (Bergé, 2008; Bergé y Sessa, 2003), de las que resulta difícil que los y las estudiantes se apropien como auténticos problemas. En estas cuestiones se encuentran las raíces del propio método matemático, ya que muchos de estos conceptos son axiomáticos o se fundamentan en demostraciones matemáticas que implicarían una aceptación de la demostración como validación de los conocimientos. Es sabido que esta visión de la demostración no es común siquiera en los y las estudiantes más avanzados (Balacheff, 1987; Montoro, 2010; Tall, 2013).

En cuanto a la visión de la completitud de los reales Bergé (2008) da cuenta de un estado inicial, para estudiantes universitarios que no estudiaron la completitud en forma explícita, que corresponde a una visión intuitiva sobre la completitud, no problematizada. En este estado un sujeto opera con los números reales como si las propiedades se verificasen naturalmente y hace uso de ciertos resultados, sin preocuparse por su fundamentación. En tal sentido pueden convivir varias concepciones contradictorias.

A modo de cierre

Destacamos el esfuerzo cognitivo que implica explicitar la naturaleza del número real, así como conceptos abstractos como el infinito o la completitud. Este esfuerzo muestra que, para que los y las estudiantes logren apropiarse de tales conceptos, la enseñanza debe integrar entre sus metas, especialmente en los últimos años de secundaria y primeros de universidad, un trabajo específico y explícito sobre estas nociones complejas. De esta manera, se facilitará la transición de una matemática escolar hacia una matemática avanzada.

Podemos pensar al número real como una construcción cultural e históricamente generada, que nos permite acceder a otros mundos posibles, más allá del mundo (paradójicamente) real de objetos finitos y discretos. La comprensión de este conocimiento numérico no solo exige una reconstrucción mental, sino que la hace posible, generando nuevas formas de pensar y concebir el mundo.

Referencias

[1] Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *Schemas, Their Development and Interaction*. In APOS Theory, (109–135). Springer.

[2] Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.* Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, 1, 97–140.

[3] Ausubel, D., Novak, J. y Henesiam, H. (1978/83). *Educational psychology. Holt Rinehart y Winton*. Traducción al español: Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Trillas.

[4] Bachelard, G. (1938/1987). *La formation del´Esprit Scientifique*. Vrin. *La formación del espíritu científico*. SigloXXI.

[5] Balacheff, N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation*. Educational studies in mathematics, 18(2), 147–176.

[6] Bergé, A. (2008). *The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis*. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 217–235.

[7] Bergé, A. y Sessa, C. (2003). *Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME, 6(3), 163–197.

[8] Brousseau, G. (1983). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Zaratoga.

[9] Bruno, A. (1997). *La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación*. Números, 29, 5–18.

[10] Fischbein E., Jehiam, R. y Cohen D. (1995). *The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers*. Educational Studies in Mathematics, 29, 29–44.

[11] Fischbein, E., Tirosh y Hess, P. (1979). *The intuition of infinity*. Educational Studies in Mathematics, 10, 3–40.

[12] Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. ISBN 90-277-1535-1.

[13] Godino, J. D. (2000). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos*. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 25. 77–88.

[14] Hiebert, J., y Carpenter, T. (1992). *Learning and teaching with understanding*. In D. grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. 65–97.

[15] Howard, R, W. (1987). *Concepts and Schemata. An Introduction*. Casell.

[16] Malara, N. (2001). *From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density*. In J. Novotna (Ed.), Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education, II (35–46).

[17] Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2002). *Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers*. In M. Limon y L. Mason (Eds). Reconsidering conceptual change. 233–258. Kluwer Academic Publishers.

[18] Monaghan, J. (2001). *Young People's Ideas of Infinity*. Educational Studies in Mathematics, 48, 239–258.

[19] Montoro, V. y Ferrero M. (2022). *Diversidad de ideas construidas por estudiantes sobre los números reales, los números irracionales, el orden y la densidad*. RevEM 37(1), 61–92. https://doi.org/10.33044/revem.32442

[20] Montoro, V. (2023) *Comprensión del número real en estudiantes de secundaria y universidad* [Tesis del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, UNCo]. http://rdi.uncoma.edu.ar/handle/uncomaid/17555

[21] Montoro, V. (2005). *Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios*. Infancia y Aprendizaje, 28(4), 409–427.

[22] Montoro, V. (2010). *Concepciones de los estudiantes de profesorado de matemática sobre la demostración*. Epsilon,75(2), 45–55.

[23] Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). *Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias*. Educational psychologist, 40(1), 27–52.

[24] O'Connor, M. C. (2001). *"Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion*. Educational Studies in Mathematics, 46, 143—185.

[25] Palacios-Amaya, M., Bianchi, V. y Montoro, V. (2018). *Estudiantes de escuela secundaria pensando los números racionales.* Revista de Educación Matemática, 33(3), 5–26.

[26] Peled, I. y Hershkovitz, S. (1999). *Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30(1), 39–46.

[27] Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*, Norton (originally published in 1941).

[28] Piaget, J. e Inhelder, B. (1969). *The Psychology of the Child*. Routledge and Kegan Paul (originally published in 1966).

[29] Pozo, J. (2014) *Psicología del Aprendizaje Humano: adquisición de conocimiento y cambio personal*. Morata.

[30] Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, (22), 1–36.

[31] Sierpinska, A. (1985). *Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite*. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 6(1), 5–67.

[32] Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. The Falmer Press.

[33] Sophian, C. (1996). *What's in a Number?* In Children's Numbers, 3–10. Westview Press.

[34] Tall, D. y Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educ Stud Math 12, 151—169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

[35] Tall, D. (2001). *Natural and formal infinities*. Educational Studies of Mathematics, 48(2 y 3), 200-238.

[36] Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Press.

[37] Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. y Wilson, J. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers*. Versión digital recuperada de `http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html`

[38] Vamvakoussi X. y Vosniadou, S. (2004). *Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach*. Learning and Instruction, 14, 453–467.

[39] Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). *How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students´ understanding of rational numbers and their notation*. Cognition and instruction, 28, 181–209. DOI: 10.1080/07370001003676603

[40] Vergnaud, G. (1982). *Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues*. For the learning of mathematics, 3(2), 31-41.

[41] Voskoglou, M. y Kosyvas, G. (2012). *Analyzing students' difficulties in understanding real numbers*. REDIMAT,1(3), 301–226.

[42] Vosniadou, S. (Ed.) (2008). *International Handbook of Research on Conceptual Change*. Routledge.

[43] Vygotsky, (1973) *Pensamiento y Lenguaje: Teorías del Desarrollo cultural de las Funciones Psiquicas*. Pleyade.

[44] White, R. T. (1988). *Learning science*. Basil Blackwell.

[45] Zazkis, R. y Sirotic, N. (2010). *Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link*. CBMS Issues in Mathematics Education, 16, 1–27.

Ir al índice general