NOTICIERO

ISSN 1514-9595 (web)

Miradas Matemáticas

De grupos de matrices a métricas de Einstein

Jorge Lauret

Universidad Nacional de Córdoba - CIEM - CONICET

Introducción

En estos días de conflicto entre los saberes antiguos y modernos, seguramente que puede decirse algo sobre una ciencia que no empezó con Pitágoras, y que no acabará con Einstein, pero que es la más vieja y la más joven de todas.

Godfrey H. Hardy (1920) (ver [H, §6])

Es curioso cómo a veces, en Matemática, las preguntas son más importantes que las respuestas. Son sólo preguntas, a veces en forma de conjetura, pero son indispensables, inquietantes, son una verdadera inspiración para la generación de una gran cantidad de Matemática que, irónicamente, quizá nunca lleguen a responderlas. A las preguntas no se les aplica la misma vara de rigurosidad que a las demostraciones, pueden estar formuladas de manera muy vaga y ser a la vez muy motivadoras. Las más profundas surgen naturalmente de la misma Matemática.

En el presente artículo se propone un viaje, de lectura liviana pero rigurosa, auto-contenida y sí, por momentos vertiginosa, que parte de las 'elementales' y bien conocidas matrices y arriba a profundas y actuales cuestiones de geometría Riemanniana homogénea, pasando por grupos, álgebras, variedades, métricas, representaciones, curvatura, puntos críticos y sistemas algebraicos de ecuaciones. El siguiente cuestionario será nuestra hoja de ruta:

- ¿Qué hace falta para que un grupo de matrices G sea una variedad diferenciable? Respuesta de Élie Cartan (1930): basta que G sea cerrado. Se llaman *grupos de Lie.*
- En tal caso, ¿cuán especial es el espacio tangente $\mathfrak{g} := T_I G$ en la matriz identidad? Respuesta: $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial de matrices tal que $XY - YX \in \mathfrak{g}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Se llaman *álgebras de Lie.*
- Dados dos grupos de matrices $K \subset G$, ¿cuándo el conjunto G/K de coclases a derecha es una variedad? Respuesta: G y K cerrados es suficiente. Se llaman *espacios homogéneos.*

- ¿Qué necesita una variedad para que aparezca realmente la geometría? Respuesta de Bernhard Riemann (1854): un producto interno en cada espacio tangente. Se llaman *métricas Riemannianas.*
- Dada una variedad M, ¿cuáles son las métricas Riemannianas más 'lindas' en M? Respuesta de David Hilbert (1915) y Arthur Besse (1980s): las métricas de *Einstein,* que de acuerdo a la Teoría de la Relatividad son las que más chances tienen de describir la curvatura de nuestro universo.
- ¿Qué se necesita para definir una métrica en un espacio homogéneo G/K? Respuesta: simplemente un producto interno en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ que sea invariante por la acción de K por conjugación.
- ¿Qué espacios homogéneos admiten una métrica de Einstein? Respuesta: se desconoce, ni siquiera queda claro qué tipo de respuesta sería satisfactoria. ¿Es la pregunta correcta?
- Dado un $M = G/K$ compacto, ¿existen sólo una cantidad finita de métricas de Einstein G-invariantes en M? Respuesta: nadie sabe, un gran misterio.

Agradecimientos. Les estoy muy agradecido a Leandro Cagliero, Emilio Lauret, Marcos Salvai y Cynthia Will por sus invaluables comentarios sobre una versión preliminar de este artículo.

1. Grupos de matrices

They are pervasive not only in geometry but also in almost all fields of mathematics and of mathematical physics. The reason is simple: Lie groups are at the same time geometric objects and algebraic ones, so they promise a rich interplay.

Marcel Berger [B2, 4.1.3.3]

El conjunto $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de todas las matrices reales $n \times n$ invertibles forma un grupo con la multiplicación usual de matrices. A un subgrupo

$$G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

se lo llama *grupo de matrices* o grupo lineal. Dichos grupos aparecen naturalmente en diferentes áreas de la Matemática como grupos de simetrías: automorfismos de estructuras algebraicas, isometrías de objetos geométricos, simetrías del conjunto de soluciones de ecuaciones diferenciales, etc.

Teorema 1.1. *Todo grupo de matrices cerrado $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable.*

Es muy remarcable y resulta hasta milagroso que el sólo hecho de ser grupo provea de tanta suavidad a un conjunto que es apenas cerrado. Algunas de las siguientes observaciones son importantes teoremas en Teoría de Lie:

- Los grupos que son variedades, o variedades que son grupos, como se prefiera, tales que el producto y la inversión son diferenciables son llamados *grupos de Lie.* Recíproca y curiosamente, todo grupo de Lie es, salvo cubrimiento finito, isomorfo a un grupo de matrices cerrado.

- El espacio tangente de la variedad G en la matriz identidad $I \in G$,

$$\mathfrak{g} := T_I G,$$

es un subespacio de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de todas las matrices reales $n \times n$. Notar que $T_I \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ pues $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es abierto en $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

- Pero $\mathfrak{g}$ es algo más que un subespacio, se obtiene que

$$[X, Y] := XY - YX \in \mathfrak{g}, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

derivando la curva $\alpha(t)\beta(s)\alpha(t)^{-1} \in G$ primero respecto de s en $s = 0$ y luego respecto de t en $t = 0$, donde $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ son curvas tales que $\alpha(0) = \beta(0) = I$ y $\alpha'(0) = X$, $\beta'(0) = Y$. Esto provee a $\mathfrak{g}$ de una estructura llamada *álgebra de Lie*.

- Recíprocamente, para toda subálgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ invariante por la transpuesta de matrices, existe un único grupo de matrices cerrado y conexo G tal que $\mathfrak{g} = T_I G$.

- Usando sólo que G es cerrado y el análogo para matrices de la conocida identidad $e^t = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{t+k}{k}\right)^k$, se prueba que $e^X \in G$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Más aún, la función exponencial $e : \mathfrak{g} \to G$ define una carta alrededor del punto $I \in G$ y es suryectiva cuando G es conexo y compacto.

La influencia de este objeto puramente algebraico $\mathfrak{g}$ sobre la variedad G es muy fuerte:

- $\mathfrak{g} = 0$ implica que G es un conjunto discreto;
- si $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$, entonces los correspondientes grupos G_1 y G_2 tienen la misma componente conexa que contiene a I;
- si $\mathfrak{g}$ es *abeliana*, i.e., $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces el grupo G es también abeliano si es conexo;
- existe un isomorfismo/difeomorfismo entre los grupos conexos G_1 y G_2 si sus álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son isomorfas;
- cuando $\mathfrak{g}$ está compuesta de matrices antisimétricas, G es compacto;
- si apenas un $X \in \mathfrak{g}$ tiene al menos un autovalor real no nulo, entonces G no puede ser compacto, pues el subconjunto $\{e^{tX} : t \in \mathbb{R}\} \subset G$ no es acotado.

Es la intención de este artículo concentrarse en los grupos de matrices compactos, los cuales son por supuesto automáticamente cerrados. Listamos a continuación algunos de los ejemplos de grupos de matrices compactos más conocidos:

- $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : AA^t = I\}$, donde A^t denota la transpuesta de A,
- $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}$,
- $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : AA^* = I\}$, donde A^* denota la transpuesta conjugada de A (se tiene que $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{SO}(2n)$ luego de ver a A como matriz real de la manera usual),
- $\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n) : \det A = 1\}$,
- $\mathrm{Sp}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) : AA^* = I\}$, donde $\mathbb{H}$ son los cuaterniones y A^* denota la transpuesta conjugada de A (se cumple que $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SU}(2n) \subset \mathrm{SO}(4n)$),

con respectivas álgebras de Lie dadas por:

- $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : X^t = -X\}$,
- $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : X^* = -X\}$,
- $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) : \operatorname{tr} X = 0\}$,
- $\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}) : X^* = -X\}$.

Vale la pena notar que todos estos grupos son más que cerrados, son subconjuntos algebraicos de $\mathbb{R}^{n^2}$ (i.e., los ceros reales simultáneos de un conjunto finito de polinomios, y por lo tanto de un único polinomio si se suman cuadrados) intersecados con $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Es por esto que son también llamados grupos algebraicos.

SUR LA STRUCTURE DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS FINIS ET CONTINUS 71

alors, en changeant au besoin le signe d'une racine, faire en sorte que tous les entiers a_{ij} associés aux trois racines indépendantes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ soient négatifs.

4. Je dis maintenant que dans le cas général, on a le théorème suivant :

Théorème I(1). — *Tout système d'entiers simple d'ordre l est équivalent à un des systèmes des cinq types suivants :*

$$(2)\left\{\begin{array}{l}
\mathbf{A})\ l \geqslant 1 : a_{ii} = -2,\ a_{ij} = -1,\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l);\\
\mathbf{B})\ l \geqslant 2 : a_{ii} = -2,\ a_{ij} = -1,\ \text{sauf } a_{ll} = -2,\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l);\\
\mathbf{C})\ l \geqslant 3 : a_{ii} = -2,\ a_{ij} = -1,\ \text{sauf } a_{ii} = -2,\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l);\\
\mathbf{D})\ l \geqslant 4 : a_{ii} = -2,\ a_{ij} = -1,\ \text{sauf } a_{l,l-1} = a_{l-1,l} = 0,\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l);\\
\mathbf{E})\ l = 6, 7, 8 : a_{ii} = -2,\ a_{ij} = -1,\ \text{sauf } a_{l,l-1} = a_{l,l-2} = a_{l-1,l} = a_{l-2,l} = 0;\\
\mathbf{F})\ l = 4 : a_{ii} = -2,\ a_{ij} = -1,\ \text{sauf } a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = -2;\\
\mathbf{G})\ l = 2 : a_{11} = a_{22} = -2,\ a_{12} = -3,\ a_{21} = -1.
\end{array}\right.$$

Ces systèmes donnent respectivement naissance aux racines suivantes, avec les transformations qui leur sont associées :

$$\mathbf{A})\quad (l \geqslant 1)\left\{\begin{array}{ll} \pm\omega_i, & \omega_i - \omega_j,\\ \pm Y_i f, & Y_i f - Y_j f, \end{array}\right.\quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

$$\mathbf{B})^{(2)}\quad (l \geqslant 2)\left\{\begin{array}{l} \pm\omega_i,\ \pm\omega_l,\ \omega_i - \omega_j,\ \pm(\omega_i - 2\omega_l),\ \pm(\omega_j - \omega_i),\ \pm(\omega_i + \omega_j - 2\omega_l),\\ \pm Y_i f,\ \pm Y_l f,\ Y_i f - Y_j f,\ \pm(Y_i f - Y_l f),\ \pm(Y_i f - 2Y_l f),\ \pm(Y_i f + Y_j f - Y_l f),\\ \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l-1). \end{array}\right.$$

$$\mathbf{C})\quad (l \geqslant 3)\left\{\begin{array}{l} \pm\omega_i,\ \pm\omega_l,\ \omega_i - \omega_j,\ \pm(\omega_i - \omega_l),\ \pm(\omega_i - 2\omega_l),\ \pm(\omega_i + \omega_j - \omega_l),\\ \pm Y_i f,\ \pm Y_l f,\ Y_i f - Y_j f,\ \pm(Y_i f - 2Y_l f),\ \pm(Y_i f - Y_l f),\ \pm(Y_i f + Y_j f - 2Y_l f),\\ \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l-1). \end{array}\right.$$

$$\mathbf{D})\quad (l \geqslant 4)\left\{\begin{array}{l} \pm\omega_i,\ \pm\omega_\lambda,\ \omega_i - \omega_j,\ \pm(\omega_i - \omega_\lambda),\ \pm(\omega_i - \omega_{l-1} - \omega_l),\ \pm(\omega_i + \omega_j - \omega_{l-1} - \omega_l),\\ \pm Y_i f,\ \pm Y_\lambda f,\ Y_i f - Y_j f,\ \pm(Y_i f - Y_\lambda f),\ \pm(Y_i f - Y_{l-1} f - Y_l f),\ \pm(Y_i f + Y_j f - Y_{l-1} f - Y_l f),\\ \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l-2;\ \lambda = l-1, l). \end{array}\right.$$

(1) Killing, Z. v. G., II, p. 33. M. Killing indique un autre système simple d'ordre 4, loc. cit., p. 30 ; mais les deux systèmes qu'il désigne par les notations IVE) et IVF) sont manifestement équivalents.

(2) On peut remarquer que le système du type B) d'ordre 2 pourrait aussi être regardé comme du type C).

72 E. CARTAN

$\mathbf{E})\ (l = 6, 7, 8)$ [illegible]
$(i \neq j \neq k \neq h \neq g;\ \lambda \neq \mu;\ i, j, k, h, g = 1, 2, \ldots, l-3;\ \lambda, \mu = l-2, l-1)$.

Les coefficients des Yf sont les mêmes que ceux des ω.

$\mathbf{F})\ (l = 4)$ [illegible]
$(i \neq j;\quad \lambda \neq \mu;\quad i, j = 1, 2;\quad \lambda, \mu = 3, 4)$.

$$\mathbf{G})\quad (l = 2)\left\{\begin{array}{l} \pm\omega_1,\ \pm\omega_2,\ \pm(\omega_1 - \omega_2),\ \pm(\omega_1 - 2\omega_2),\ \pm(\omega_1 - 3\omega_2),\ \pm(2\omega_1 - 3\omega_2),\\ \pm Y_1 f,\ \pm Y_2 f,\ \pm(3Y_1 f - Y_2 f),\ \pm(3Y_1 f - 2Y_2 f),\ \pm(Y_1 f - Y_2 f),\ \pm(2Y_1 f - Y_2 f). \end{array}\right.$$

Le théorème est vrai pour $l = 1$ et $l = 2$. Il suffit donc de démontrer que s'il est vrai pour $l = 1, 2, \ldots, p$, il est vrai pour $l = p + 1 \geqslant 3$.

5. Prenons d'abord un sous-système simple d'ordre $l - 1 \geqslant 2$ et du type **A**). Un au moins des nombres $a_{1l}, a_{2l}, \ldots, a_{l-1,l}$ est différent de zéro. S'il y en a plus d'un, si par exemple $a_{1l} a_{2l} \neq 0$, on a

$$a_{1l} a_{12} a_{2l} = a_{l1} a_{21} a_{l2} \leqslant 0,$$

d'où

$$a_{1l} a_{2l} = a_{l1} a_{l2} \geqslant 0 ;$$

il en résulte facilement $a_{l1} = a_{1l}$, $a_{l2} = a_{2l}$. Supposons

$$a_{1l} = a_{2l} = \cdots = a_{hl} = \alpha, \qquad a_{h+1,l} = \cdots = a_{l-1,l} = 0,$$
$$a_{l1} = a_{l2} = \cdots = a_{lh} = \beta, \qquad a_{l,h+1} = \cdots = a_{l,l-1} = 0,$$
$$1 \leqslant h \leqslant l - 1.$$

On voit d'abord que les cas de h et de $l - h$ se ramènent l'un à l'autre, car si on prend $-\omega'_l = \omega_l + a_{l1}\omega_1 = \omega_l + \beta\omega_1$, $-Y'_l f = Y_l f + a_{1l} Y_1 f = Y_l f + \alpha Y_1 f$, on trouve

$$a'_{1l} = a'_{h+1,l} = \cdots = a'_{l-1,l} = \alpha, \qquad a'_{2l} = \cdots = a'_{hl} = 0,$$
$$a'_{l1} = a'_{l,h+1} = \cdots = a'_{l,l-1} = \beta, \qquad a'_{l2} = \cdots = a'_{lh} = 0.$$

Figura 1: Dos páginas de la tesis doctoral de Élie Cartan (1894), donde aparece el teorema con la clasificación de los grupos de Lie simples compactos.

Todo grupo de matrices conexo y compacto con grupo fundamental finito se descompone de manera única como producto de grupos *simples*, i.e., sin subgrupos normales conexos. Una de las clasificaciones más importantes de la Matemática es la de los grupos de matrices compactos simples, la cual es equivalente a la de las álgebras de Lie complejas simples (i.e., sin ideales) y fue obtenida por Killing y Cartan en 1894 (ver Figuras 1 y 2):

- **Clásicos**: $\mathrm{SU}(n)$, $n \geq 2$, $\mathrm{SO}(2n+1)$, $n \geq 2$, $\mathrm{Sp}(n)$, $n \geq 3$, $\mathrm{SO}(2n)$, $n \geq 4$, de dimensiones $n^2 - 1$, $n(2n+1)$, $n(2n+1)$, $n(2n-1)$ y denotados por A_{n-1}, B_n, C_n, D_n, respectivamente.
- **Excepcionales**: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, de dimensiones 78, 133, 248, 52 y 14, respectivamente.

Los grupos excepcionales pueden ser vistos como grupos de matrices de la siguiente manera, considerando el tamaño más pequeño de matrices posible:

$$\mathrm{E}_6 \subset \mathrm{GL}_{27}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{E}_7 \subset \mathrm{GL}_{56}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{E}_8 \subset \mathrm{GL}_{248}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{F}_4 \subset \mathrm{GL}_{26}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{G}_2 \subset \mathrm{GL}_7(\mathbb{C}).$$

En las posteriores décadas luego de la clasificación, se fueron obteniendo presentaciones explícitas de todos los grupos simples excepcionales, por ejemplo, $\mathrm{G}_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$, el grupo de automorfismos del álgebra de octoniones, $\mathrm{F}_4 = \mathrm{Aut}(\mathcal{J})$, donde $\mathcal{J}$ es el álgebra de Jordan de matrices 3×3 autoadjuntas sobre $\mathbb{O}$ ($\dim \mathcal{J} = 27$), y se han encontrado algunas inquietantes relaciones entre E_8 y el *monster group*, el grupo finito simple excepcional más grande, que tiene orden $\sim 10^{54}$ y representación compleja más chica de dimensión 196883.

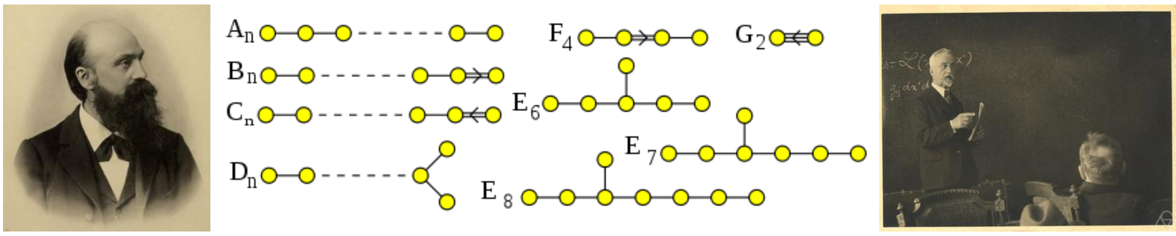

Figura 2: Wilhelm Killing (izquierda), Élie Cartan (derecha) y los diagramas que determinan la clasificación de los grupos de Lie simples compactos.

2. Espacios homogéneos

Homogeneous spaces are, in a sense, the nicest examples of Riemannian manifolds and are good spaces on which to test conjectures.

Jeff Cheeger-David Ebin [CE, Chapter 3]

Dado un subgrupo K de un grupo G, consideramos el conjunto de coclases a derecha,

$$G/K := \{[A] : A \in G\}, \qquad \text{donde} \quad [A] := AK = \{AB : B \in K\},$$

al cual llamaremos *espacio homogéneo*.

Teorema 2.1. *Si $K \subset G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ son grupos de matrices cerrados, entonces el espacio homogéneo $M = G/K$ es una variedad diferenciable.*

Este resultado tiene consecuencias muy relevantes y gratificantes:

- La topología cociente en $M = G/K$ es la involucrada, así que si G es conexo o compacto, entonces también lo es M.
- El espacio tangente de $M = G/K$ en el punto $o = [I]$, llamado *origen*, es precisamente

  $$T_oM = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, \qquad \text{en particular,} \quad \dim M = \dim G - \dim K,$$

  donde $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ son respectivamente las álgebras de Lie de G y de K.
- La proyección usual $\pi : G \to G/K$ resulta ser una submersión entre las variedades.
- Cada $A \in G$ define un difeomorfismo τ_A de M por $\tau_A(BK) := ABK$, el cual fija el punto o si y sólo si $A \in K$.
- Todo automorfismo φ de G tal que $\varphi(K) \subset K$ también define un difeomorfismo de M que fija el origen dado por $BK \mapsto \varphi(B)K$. Por ejemplo, φ podría ser la conjugación por cualquier elemento del normalizador $N_G(K)$.

Notar que los τ_A's definen una acción *transitiva* de G sobre G/K (i.e., con una sola órbita igual a todo M). Una variedad diferenciable M se llama *homogénea* si admite una acción transitiva de algún grupo de Lie, y cada una de estas acciones proveen una presentación distinta de M como espacio homogéneo.

Observación 2.2. Se puede probar que dados dos puntos p y q en cualquier variedad diferenciable M, siempre existe un difeomorfismo f de M tal que $f(p) = q$. En otras palabras, no hay ningún punto especial en M. Esto, por supuesto, no ocurre en general para un espacio topológico X y sus homeomorfismos. Curiosamente, puede fallar incluso en un espacio topológico localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, como lo muestra el espacio llamado 'línea con dos orígenes', aunque si pedimos que X sea además Hausdorff, sí se cumple: para todo par de puntos p y q en X existe un homeomorfismo f de X tal que $f(p) = q$.

No es fácil encontrar una variedad diferenciable que no sea homogénea. El ejemplo más simple es el toro doble (i.e., una dona con dos agujeros), que no puede ser homogénea debido a la siguiente obstrucción topológica: toda variedad homogénea M tiene característica de Euler $\chi(M) \geq 0$, y la del toro doble es igual a -2 (ver Figura 3).

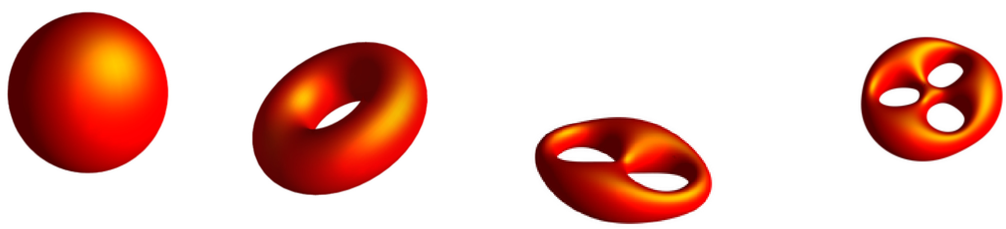

Figura 3: Las dos variedades de la izquierda son homogéneas, los dos de la derecha, no.

Supongamos ahora que M es simplemente un conjunto donde un grupo de matrices cerrado G actúa de forma *transitiva*. Si además el *subgrupo de isotropía* en algún elemento $p \in M$, definido por $K := \{A \in G : A \cdot p = p\}$, es cerrado, entonces M queda identificado con el espacio homogéneo G/K. Así es como el conjunto M tiene la fortuna de subir de categoría, $M = G/K$ es ahora una variedad diferenciable con espacios tangentes, donde se puede derivar funciones y estudiar sus puntos críticos, integrar funciones, definir campos y distribuciones, etc.

Ejemplo 2.3. Es fácil ver que en el conjunto

$$M := \{\text{subespacios de } \mathbb{R}^n \text{ de dimensión } 2\},$$

el grupo $\mathrm{O}(n)$ actúa transitivamente y su isotropía en el plano generado por e_1, e_2 es

$$K = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{O}(2) & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{O}(n-2) \end{array}\right].$$

Esto implica que

$$M = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(n-2) = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(n-2))$$

es, naturalmente, una variedad diferenciable compacta y conexa de dimensión $2(n-2)$, pues

$$\dim M = \dim \mathrm{O}(n) - \dim K = \frac{n(n-1)}{2} - 1 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 2(n-2).$$

Ciertamente, en vista de la definición original del conjunto M, todo esto era muy difícil de intuir. Se necesitan por ejemplo 6 parámetros para describir el conjunto de 2-subespacios de $\mathbb{R}^5$.

Bastante más ambicioso es preguntarse cuál sería la curva más corta entre dos subespacios de $\mathbb{R}^n$, pero para responder a esto necesitamos una métrica natural en M, lo cual es el objeto de estudio de la siguiente sección.

Otros ejemplos donde se puede aplicar el mismo 'yoga' del Ejemplo 2.3:

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n) = \{$productos internos en $\mathbb{R}^n\}$.
- $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k) = \{$subespacios k-dimensionales de $\mathbb{R}^n\}$ (*Grassmannianas*).
- $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n_1) \times \cdots \times \mathrm{O}(n_k) = \{$banderas $W_1 \subset \cdots \subset W_{k-1} \subset \mathbb{R}^n : \dim W_i = n_1 + \cdots + n_i\}$, donde $n_1 + \cdots + n_k = n$ (variedades *banderas*).
- $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-k) = \{k$-uplas ortonormales de vectores de $\mathbb{R}^n\}$ (variedades de *Stiefel*).
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{$retículos de rango n en $\mathbb{R}^n\}$.

3. Métricas Riemannianas

A Riemannian manifold is really made up of an infinity of small pieces of Euclidean spaces.

Élie Cartan [Be, 0.1]

Thus it is that mathematicians long ago solved the formal problems to which we are led by the general postulate of relativity.

Albert Einstein [E2, Chapter 24]

Las variedades diferenciables son a veces descriptas como espacios topológicos donde se puede hacer análisis, tal como en $\mathbb{R}^n$, con sólo tomar coordenadas. Un aspecto crucial que esta descuidada descripción está ignorando es el importante papel que juega en el análisis real el producto interno usual que se tiene en $\mathbb{R}^n$, en realidad, en cada espacio tangente de $\mathbb{R}^n$. Repasemos algunas de las limitaciones que padece una variedad diferenciable:

- La derivada de un campo X respecto de un vector tangente v en un punto $p \in M$ no está definida.
- ¿Cuál es la longitud de un vector tangente? En particular, no podemos medir tampoco la longitud de una curva. ¿Cuál es entonces la distancia entre dos puntos, o la curva más corta entre ellos?
- No existen los conceptos de campo gradiente ni de Hessiano de una función, como tampoco el de la divergencia de un campo.
- Sin alguna conexión naturalmente definida entre los espacios tangentes, es imposible trasladar 'paralelamente' un vector a lo largo de una curva. Esto impide contar con una noción de quiénes serían las curvas análogas a las rectas en la variedad.

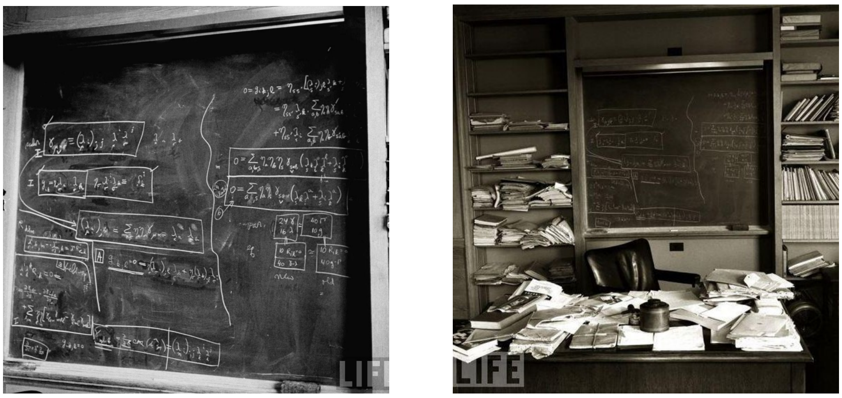

Figura 4: Oficina de Albert Einstein en Princeton, en el pizarrón se pueden ver la métrica Riemanniana g y su curvatura de Ricci R.

Todo esto representa una gran motivación para, sin más, considerar un producto interno en cada espacio tangente de una variedad diferenciable M. Si esto se realiza de una manera diferenciable, al objeto resultante se lo denomina *métrica Riemanniana*, pues fueron introducidas por Riemann en 1854 en su conferencia para acceder a la habilitación en Göttingen al frente de su director, Gauss. A una métrica Riemanniana se la denota por g, siendo g_p el producto interno en cada $p \in M$. La notación g es debida a Einstein y proviene de campo gravitacional (ver Figura 4). Al par (M, g) se lo llama *variedad Riemanniana*.

Una métrica Riemanniana en una variedad M aporta mucho más que la posibilidad de hacer análisis en variedades, en efecto, hace germinar la geometría:

- **Longitud** de curvas: $L(\alpha) := \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}\, dt$.
- **Distancia** en M: $d_g(p, q) := \text{ínf}\{L(\alpha) : \alpha \text{ curva de } p \text{ a } q\}$, la cual define la misma topología de M.
- **Isometrías**: función diferenciable $f : M \to M$ tal que
$$g_{f(p)}(df|_p\cdot, df|_p\cdot) = g_p(\cdot, \cdot), \qquad \forall p \in M,$$
o equivalentemente, $d_g(f(p), f(q)) = d_g(p, q)$ para todo $p, q \in M$. El grupo $\mathrm{Iso}(M, g)$ de todas las isometrías de una métrica Riemanniana g es siempre un grupo de Lie, aunque genéricamente trivial. Sólo las métricas más 'lindas' tienen $\mathrm{Iso}(M, g)$ no trivial, i.e., tienen algunas simetrías.
- **Área** o **volumen** de subconjuntos de M.
- **Conexión** natural entre espacios tangentes, paralelismo, geodésicas (las cuales juegan el papel de 'rectas' en M), holonomía.
- **Curvatura**, la métrica g le da forma a M en algún sentido.

El concepto de curvatura convenció a Einstein de usar las métricas Riemannianas (y *Lorentzianas*, i.e., cuando g_p es un producto escalar de signatura $(n-1, 1)$) para describir diferentes modelos de nuestro universo, dando comienzo a la Teoría de la Relatividad. Dicho de manera muy coloquial, Einstein propuso explicar la fuerza de gravedad mediante la curvatura que los objetos de gran masa inducen al universo, atrayendo así a otros objetos.

La *curvatura seccional* de una métrica g es la función, en cada $p \in M$, dada por
$$\mathrm{Sec}(g)_p : \{\text{2-subspacios de } T_pM\} \to \mathbb{R},$$

donde $\mathrm{Sec}(g)_p(\sigma)$ es la curvatura de Gauss de la superficie generada por todas las geodésicas que pasan por p con velocidad en el plano σ (ver Figura 5). Debido a que el dominio de $\mathrm{Sec}(g)_p$ es conexo y compacto (ver Ejemplo 2.3), su imagen es un intervalo cerrado $[a_p, b_p]$ para cada $p \in M$. La curvatura seccional es un objeto extremadamente difícil de estudiar, por ejemplo, es todavía un problema abierto la clasificación de las variedades compactas que admiten una métrica de curvatura positiva, i.e., $0 < a_p$ para todo $p \in M$ (ver [Se]). La existencia de métricas con alguna propiedad especial de curvatura tiene usualmente dramáticas consecuencias topológicas para M.

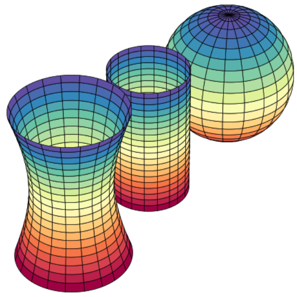

Figura 5: De izquierda a derecha, curvatura de Gauss negativa, cero y positiva, respectivamente.

El siguiente resultado nos permite definir métricas Riemannianas en espacios homogéneos de una manera completamente algebraica.

Teorema 3.1. *En un espacio homogéneo $M = G/K$, todo producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ K-invariante en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ define una única métrica Riemanniana en M.*

Algunas aclaraciones:

- Cada matriz $A \in K$ actúa en $\mathfrak{g}$ por conjugación, i.e., $\mathrm{Ad}(A)X := AXA^{-1}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, y como $\mathrm{Ad}(A)\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$, entonces también actúa en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} = T_oM$.
- Un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ se dice entonces *K-invariante* si $\mathrm{Ad}(A) : \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ es $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ortogonal para todo $A \in K$ (i.e., $\langle \mathrm{Ad}(A)\cdot, \mathrm{Ad}(A)\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$).
- La métrica g que brinda el teorema es *G-invariante*, i.e., el difeomorfismo $\tau_A : M \to M$ es una isometría de g para todo $A \in G$. En otras palabras, G actúa transitivamente en M por isometrías de g. A una variedad Riemanniana (M, g) con esta bella propiedad de que para todo par de puntos $p, q \in M$ existe una isometría f tal que $f(p) = q$ se la llama *homogénea* (i.e., su grupo de isometrías $\mathrm{Iso}(M, g)$ actúa transitivamente en M).
- Recíprocamente, toda métrica G-invariante en $M = G/K$ satisface que g_o es un producto interno K-invariante en $T_oM = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$.

Se obtiene así que, cuando K es compacto, siempre existe una métrica G-invariante en $M = G/K$: integramos (o promediamos) sobre K cualquier producto interno en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Cuando además $G \subset \mathrm{O}(n)$ (i.e., G compacto) y es *semisimple* (i.e., producto de simples), el producto interno canónico dado por

$$\langle X, Y\rangle_{\mathfrak{g}} := -\operatorname{tr} XY, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n), \tag{1.1}$$

es claramente K-invariante y por lo tanto define una métrica G-invariante distinguida en $M = G/K$ llamada *estándar* (denotada por g_{est}).

Ejemplo 3.2. En el espacio homogéneo $M = G/K = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(2)\times\mathrm{O}(n-2)$ del Ejemplo 2.3, es fácil ver que K actúa en forma *irreducible* en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)/\mathfrak{so}(2)+\mathfrak{so}(n-2)$ (i.e., sin subespacios propios no nulos invariantes), por lo tanto M admite una sola métrica Riemanniana $\mathrm{O}(n)$-invariante salvo múltiplo. La existencia sigue de la compacidad de K y la unicidad de que la matriz simétrica correspondiente a cualquier otro producto interno K-invariante no puede tener autoespacios propios por la irreducibilidad, i.e., debe ser un múltiplo de la identidad (a este argumento se lo denomina a veces ‘por el Lema de Schur’).

De esta manera, este conjunto M de todos los 2-subespacios de $\mathbb{R}^n$, que evolucionó de mero conjunto a variedad diferenciable en Ejemplo 2.3, ahora se ha convertido de una manera muy natural en una variedad Riemanniana, donde es posible responder todas las preguntas geométricas realizadas más arriba, y mucho más ...

4. Métricas de Einstein

We do not claim to work for mathematical physics. However, in their views on this, theoretical physicists fall into two groups. The first believes that what we do is just rubbish. The second thinks that Riemannian manifolds (for example Einstein Riemannian manifolds) may be of some help to them, if only by way of inspiration.

Arthur Besse [Be, 0.14]

En Matemática, hay preguntas que a pesar de su ambigüedad pueden llegar a ser muy inspiradoras, motivadoras de grandes avances. Es precisamente su falta de rigurosidad lo que las hace incitantes. La siguiente es una de ellas, aparece a lo largo de toda la Matemática, no sólo en geometría, y en el contexto de este artículo se presenta de la siguiente manera.

Problema 4.1. Dada M una variedad diferenciable, ¿cuál es la ‘mejor’ o ‘más distinguida’ métrica Riemanniana sobre M? ¿hay una métrica ‘canónica’ en M?

Figura 6: Algunos de los amigos de Arthur Besse, de izquierda a derecha, Marcel Berger, Lionel Bérard-Bergery, Jean-Pierre Bourguignon y Pierre Pansu.

Por supuesto, el significado de los adjetivos ‘mejor’, ‘distinguida’ y ‘canónica’ son parte del problema. Las condiciones que definen una tal métrica deben ser suficientemente razonables para permitir su existencia, pero a la vez no demasiado indulgentes, pues nos interesa algún tipo de unicidad. Esta pregunta es el leitmotiv del libro [Be], escrito por Arthur Besse en los 1980s (ver Figura 6), un matemático que nunca morirá porque nunca existió, como Nicolas Bourbaki.

Se requiere de una buena apertura mental para pensar en el conjunto

$$\mathcal{M}_M := \{\text{métricas Riemannianas en } M\},$$

un objeto realmente gigante y oscuro que puede ser visto como un invariante de M, sus propiedades pueden ser usadas para diferenciar a dos variedades. Se tiene que $\mathcal{M}_M$ es una variedad de dimensión infinita de manera natural. El Problema 4.1 pregunta por elementos distinguidos en este monstruo.

Una de las formas naturales de 'evaluar' a una métrica es analizando cuán uniforme es su curvatura, tanto a lo largo de M como del inmenso espacio de planos de cada espacio tangente. Como primera propuesta podríamos pedir que la curvatura seccional sea constante, i.e.,

$$\mathrm{Sec}(g)_p(\sigma) = \kappa, \qquad \text{para todo 2-subespacio } \sigma \text{ de } T_pM \text{ y todo } p \in M. \tag{1.2}$$

Esto proporciona la unicidad, pero es tan fuerte que sólo hay tres variedades simplemente conexas en cada dimensión que admiten tal métrica: el espacio Euclídeo ($\kappa = 0$), la esfera ($\kappa > 0$) y el espacio hiperbólico ($\kappa < 0$). Es así como la primera propuesta resulta bastante ingenua.

Una segunda opción podría ser pedir que la suma de las curvaturas seccionales de todos los planos definidos por una base ortonormal de T_pM no dependa del punto $p \in M$. A dicha función, dada más precisamente por

$$\mathrm{Sc}(g) : M \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Sc}(g)(p) := \sum_{i<j} \mathrm{Sec}(g)_p(\sigma_{ij}),$$

donde $\{X_1, \dots, X_n\}$ es cualquier base g_p-ortonormal de T_pM y σ_{ij} es el subespacio generado por X_i, X_j, se la llama *curvatura escalar* de g. La condición en cuestión es que la función $\mathrm{Sc}(g)$ sea constante en M. La existencia está garantizada, en efecto, para toda métrica g existe una función diferenciable positiva $\psi : M \to \mathbb{R}$ tal que la curvatura escalar de la nueva métrica ψg es constante, lo que implica que esta condición es muy débil, hay demasiadas métricas que la satisfacen.

Esto nos lleva a buscar una condición intermedia entre las dos ya consideradas. Dado un vector tangente unitario $X \in T_pM$, podemos considerar la suma de las curvaturas seccionales de todos los planos generados por X y otro vector de una base ortonormal de T_pM que contenga a X, y pedir como condición que dicho número no dependa de la dirección X, ni del punto p. Ésta es precisamente la definición de una *métrica de Einstein*, las cuales son, de acuerdo a Einstein, las que más se acercarían a describir la curvatura de nuestro universo.

La cuenta de arriba define en realidad una forma cuadrática para cada $p \in M$, llamada *curvatura de Ricci*, dada por

$$\mathrm{Ric}(g)_p : T_pM \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Ric}(g)_p(X) := \sum_{i=2}^{n} \mathrm{Sec}(g)_p(\sigma_i),$$

donde σ_i es el subespacio generado por X, X_i, $i = 2, \dots, n$ y $\{X, X_2, \dots, X_n\}$ es una base g_p-ortonormal de T_pM. Una métrica g es entonces de Einstein cuando la correspondiente forma bilineal simétrica, también denotada por $\mathrm{Ric}(g)_p$, satisface que

$$\mathrm{Ric}(g)_p = \rho g_p, \qquad \text{para algún } \rho \in \mathbb{R}, \quad \text{para todo } p \in M. \tag{1.3}$$

A ρ se la llama *constante de Einstein* o constante cosmológica. La ecuación de Einstein (1.3) representa un tremendo sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con incógnita g.

Corresponde en este momento hacer las siguientes observaciones:

- Sobre la existencia, es muy frustrante que la siguiente pregunta permanezca abierta: ¿hay una variedad M de dimensión ≥ 5 que no admita una métrica de Einstein? En dimensión 4 se conocen varias y en dimensiones 2 y 3 las métricas de Einstein son en realidad las que tienen curvatura seccional constante (ver (1.2)).

- Respecto de la unicidad, se tiene que el subespacio $\mathcal{E}_M \subset \mathcal{M}_M$ de métricas de Einstein sobre M, si no es vacío, tiene 'dimensión' finita, se necesita sólo una cantidad finita de parámetros para describirlo. Considerando el fastuoso tamaño de $\mathcal{M}_M$, esto puede admitirse como una propiedad razonable de unicidad.

- Otra propiedad relacionada a la unicidad es la *rigidez*: la métrica de Einstein está aislada en el espacio de moduli $\mathcal{M}_M/\sim$ de métricas salvo *homotecia* (i.e., salvo isometría y escalamiento). En otras palabras, es localmente única. Se conocen demasiado pocas métricas de Einstein rígidas, es uno de los problemas más importantes del tema.

En 1915, Hilbert demostró que si M es compacta, las métricas de Einstein son precisamente los puntos críticos de la funcional *curvatura escalar total* definida por

$$\mathrm{ScT} : \mathcal{M}_M^1 \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ScT}(g) := \int_M \mathrm{Sc}(g)(p)\, d\,\mathrm{vol}(g),$$

donde $\mathcal{M}_M^1$ es la subvariedad de $\mathcal{M}_M$ de métricas de volumen igual a 1. Esto provee otro punto de vista desde el cual las métricas de Einstein son muy especiales, además de una herramienta analítica para abordar los problemas de existencia y rigidez.

El coíndice y la nulidad de toda métrica de Einstein como punto crítico de $\mathrm{ScT} : \mathcal{C}_M^1 \to \mathbb{R}$ son siempre finitos, donde $\mathcal{C}_M$ es la subvariedad de métricas con curvatura escalar constante. Sin embargo, los máximos locales se hicieron esperar, luego de algunos espacios simétricos encontrados en los 1980s (ver [K]), recién el año pasado fue probado que en realidad abundan (ver [LW, LL, S]). Notar que si una métrica de Einstein g es *estable* (i.e., el Hessiano es definido negativo modulo deformaciones triviales y en particular es un máximo local), entonces es un punto crítico aislado salvo homotecia, es decir, g es rígida.

Observación 4.2. En algunos contextos donde se sabe que las métricas de Einstein no existen, por ejemplo el de métricas invariantes en un grupo de matrices no compacto, un concepto relativamente nuevo (esto es, en Matemática, no mucho más de 30 años) aporta a veces una métrica canónica, son los llamados *solitones de Ricci*:

$$\mathrm{Ric}(g) = \rho g + \mathcal{L}_X g, \qquad \text{para algún } \rho \in \mathbb{R} \text{ y campo diferencial } X \text{ en } M,$$

donde $\mathcal{L}_X g$ denota la derivada de Lie de la métrica g respecto de X. De estos animales se tuvo que deshacer Perelman en su prueba de la Conjetura de Poincaré, pues son precisamente las singularidades de su principal herramienta, el ya célebre *flujo de Ricci* introducido por Hamilton en los 1980s (ver [L1, L2] para más información).

5. Métricas de Einstein homogéneas

For homogeneous but nonsymmetric spaces, even though in theory the curvature is algebraically computable, it can be a very subtle question to find Einstein homogeneous metrics, and it can even be proved to be impossible in some cases.

Marcel Berger [B1, III.C]

En espacios homogéneos, como era de esperar, las ecuación de Einstein (1.3) para una métrica invariante puede escribirse de forma algebraica, como un sistema de ecuaciones polinomiales con una cantidad finita de variables. En efecto, como todos los objetos involucrados en la ecuación (1.3) son G-invariantes, la condición de Einstein es equivalente a $\operatorname{Ric}(g)_o = \rho g_o$, algo que sucede enteramente en $T_oM = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, un espacio vectorial de dimensión finita.

Más precisamente, si suponemos por simplicidad que G es compacto y semisimple y la representación de isotropía del espacio homogéneo $M = G/K$ es *libre de multiplicidad*, es decir, se descompone como

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{k} = \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_r, \tag{1.4}$$

donde las $\mathfrak{p}_i$'s son K-representaciones irreducibles y mutuamente no equivalentes, entonces toda métrica G-invariante en $M = G/K$ está determinada por una r-upla $g = (x_1, \ldots, x_r)$ respecto del producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ (ver (1.1)):

$$g = x_1\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1} + \cdots + x_r\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{p}_r\times\mathfrak{p}_r}, \qquad x_i > 0.$$

Las ecuación de Einstein (1.3) para g queda entonces descripta por el siguiente sistema:

$$\frac{1}{2x_k} - \frac{1}{2d_k}\sum_{i,j=1}^{r} c_{ij}^k \frac{x_j}{x_i x_k} + \frac{1}{4d_k}\sum_{i,j=1}^{r} c_{ij}^k \frac{x_k}{x_i x_j} = \rho, \qquad \forall k = 1, \ldots, r, \tag{1.5}$$

donde los c_{ij}^k son las *constantes de estructura* del corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ restringido a $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ respecto de la descomposición (1.4), i.e.,

$$c_{ij}^k := \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\operatorname{tr}[X_\alpha^i, X_\beta^j]X_\gamma^k\right)^2, \qquad \{X_\alpha^i\} \text{ base } \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}\text{-ortonormal de } \mathfrak{p}_i.$$

El sistema (1.5) es algebraico pero extremadamente complicado, las siguientes preguntas básicas y muy naturales han resistido el embate de una gran cantidad de matemáticos por más de medio siglo:

- ¿Cuáles espacios homogéneos admiten una métrica de Einstein?, en particular, ¿cuándo el sistema (1.5) admite una solución positiva? Los ingredientes de una tal caracterización podrían ser condiciones puramente algebraicas sobre los grupos de matrices G y K y no menos importante, sobre cómo está incluido K en G, como así también condiciones topológicas sobre la variedad $M = G/K$. Los resultados más fuertes hasta ahora, obtenidos por Böhm-Wang-Ziller, Böhm y Graev, dan condiciones suficientes para la existencia en términos de, respectivamente, grafos, complejos simpliciales y conjuntos semialgebraicos asociados al curioso conjunto de todos los grupos intermedios $K \subset H \subset G$ y sus correspondientes banderas $H_1 \subset \cdots \subset H_m$ (ver [BK]). No obstante, vale la pena notar que dichas condiciones están lejos de ser necesarias; en efecto, existen muchos espacios homogéneos que sin satisfacerlas igual admiten métricas de Einstein.

- Dado un espacio homogéneo $M = G/K$, ¿existen sólo una cantidad finita de métricas de Einstein G-invariantes en M?, en particular, ¿es la cantidad de soluciones positivas al sistema (1.5) siempre finita? Esta desafiante pregunta permanece abierta incluso para espacios homogéneos muy conocidos con K abeliano y de baja dimensión como

  $$M^{12} = \mathrm{SO}(6)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(2)^3), \quad M^{20} = \mathrm{SU}(5)/\mathrm{S}(U(1)^5), \quad M^{24} = \mathrm{SO}(8)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(2)^4),$$

  donde la cantidad de variables es, respectivamente, $r = 6, 10, 12$.

Cuando la representación de isotropía de $M = G/K$ no es libre de multiplicidad todo se complica aún más. El cálculo de la curvatura de Ricci puede llegar a ser realmente penoso y la cantidad de variables aumenta notablemente respecto de la dimensión. Por ejemplo, no se ha logrado todavía una clasificación de las métricas de Einstein en los grupos de matrices $M^6 = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ o $M^8 = \mathrm{SU}(3)$, donde la cantidad de variables es 15 y 28, respectivamente. Ni siquiera se sabe si hay sólo una cantidad finita.

Existen cientos de artículos probando la existencia y a veces incluso clasificando todas las métricas de Einstein en ciertas clases especiales de espacios homogéneos (ver el reciente artículo expositivo [J], donde también se desarrolla el caso no compacto). Es importante notar que hay en la actualidad relativamente pocos ejemplos de espacios homogéneos para los cuales se haya probado que no admiten métricas de Einstein. Algunos de los ejemplos conocidos de no existencia de baja dimensión son:

$$M^{12} = \mathrm{SU}(4)/\mathrm{SU}(2), \qquad M^{12} = \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2), \qquad M^{21} = \mathrm{SO}(8)/\mathrm{SO}(4)\mathrm{U}(1),$$

donde la inclusión en el espacio de la izquierda no es la usual, está definida via $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{Sp}(2) \subset \mathrm{SU}(4)$, y en el segundo el centro S^1 de $\mathrm{U}(2)$ se incrusta con pendiente racional distinta de 1.

Una pregunta muy natural es para qué espacios homogéneos la métrica estándar g_{est} es Einstein, en particular, cuándo $x_1 = \cdots = x_r = 1$ es solución del sistema (1.5). La respuesta para G simple fue dada por Wang-Ziller en los 1980s (ver [WZ]) y significó un verdadero *tour de force* en teoría de representaciones de grupos de matrices compactos. La lista obtenida no es tan larga considerando la magnitud de la selva a explorar, consta de 12 familias infinitas (numerables) con G clásico y 22 ejemplos aislados (sólo 2 con G clásico y 20 con G excepcional). En [LW, LL, S] se obtuvo qué tipo de puntos críticos son cada una de estas métricas estándar de Einstein.

La pregunta de cuándo g_{est} es Einstein para G semisimple con dos o más factores simples sigue abierta.

6. Reflexiones

Leer, por lo pronto, es una actividad posterior a la de escribir: más resignada, más civil, más intelectual.

Jorge Luis Borges (1935)

En lugar de conclusiones, se hacen en esta última sección algunas reflexiones que están basadas en opiniones personales del autor.

En la primera página de [E1], su principal artículo sobre la Teoría de la Relatividad, Albert Einstein escribió:

> *The mathematical tools that are necessary for general relativity were readily available in the 'absolute differential calculus', which is based upon the research on non-Euclidean manifolds by Gauss, Riemann, and Christoffel, and which has been systematized by Ricci and Levi-Civita and has already been applied to problems of theoretical physics.*

Así es, en Matemática, como en la vida, nadie sabe para quién trabaja. Lamentable y curiosamente, esta primera página no aparece en ninguna de las famosas traducciones del artículo, sólo se encuentra en el manuscrito original y fue revelada a la comunidad matemática por Alicia Dickenstein en 2009 (ver [D]).

Se puede aprovechar el espacio que dejan la inmensa cantidad de defensores y promotores de lo interdisciplinario, para hacer una pequeña apología, compensatoria, de la Matemática como disciplina. Algo que se ha intentado mostrar en este artículo con varios ejemplos explícitos, es que esta disciplina milenaria, si bien se nutre de preguntas o problemas que se generan en otras ciencias como la Física, la Astronomía, la Química, la Computación, etc., en realidad evoluciona por preguntas que van emergiendo de la misma Matemática, a medida que se avanza en el conocimiento, el entendimiento y la intuición. Son preguntas de diversos grados de profundidad, a veces naturales o esperables, a veces muy disruptivas o desconcertantes, que pueden ser respondidas en unas semanas o pueden perdurar por siglos, pero lo más remarcable es que aparecen de forma tan natural que no necesitan de ninguna argumentación, simplemente aparecen reclamando por un poco más de entendimiento sobre algo.

Es esencialmente el placer de entender el motor de la Matemática.

Referencias

[B1] M. BERGER, Riemannian geometry during the second half of the twentieth century, *Univ. Lect. Ser.* **17**, Amer. Math. Soc. (2000).

[B2] M. BERGER, A panoramic view of Riemannian geometry, Springer-Verlag (2003).

[Be] A. BESSE, Einstein manifolds, *Ergeb. Math.* **10** (1987), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

[BK] C. BÖHM, M. KERR, Homogeneous Einstein metrics and butterflies. *Ann. Global Anal. Geom.* **63** (2023), 92.

[CE] J. CHEEGER, D. EBIN, Comparison theorems in Riemannian geometry, North Holland, Amsterdam (1975).

[D] A. DICKENSTEIN, A hidden praise of Mathematics, *Bulletin Amer. Math. Soc.* **46** (2009), 125-129.

[E1] A. EINSTEIN, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik* **9** (1916), 769-822.

[E2] A. EINSTEIN, Relativity: The Special and General Theory, New York: Henry Holt (1920).

[H] G.H. HARDY, A Mathematician's Apology, *Cambridge Univ. Press* (1940). Hay traducciones al español disponibles en internet.

[J] M. JABLONSKI Homogeneous Einstein Manifolds, *Revista de la UMA*, **64** (2023), 461-485.

[K] N. KOISO, Rigidity and stability of Einstein metrics: the case of compact symmetric spaces, *Osaka J. Math.* **17** (1980), 51-73.

[LL] E.A. Lauret, J. Lauret, The stability of standard homogeneous Einstein manifolds, *Math. Z.*, **303**, 16 (2023).

[L1] J. Lauret, Finding solitons, *Notices Amer. Math. Soc.*, May, 2020.

[L2] J. Lauret, Un enigma llamado Grigori Perelman, *Revista de Educación Matemática* **36**, no. 3 (2021), 29-38.

[LW] J. Lauret, C.E. Will, On the stability of homogeneous Einstein manifolds II, *J. London Math. Soc.* **106** (2022), 3638-3669.

[S] P. Schwahn, The Lichnerowicz Laplacian on normal homogeneous spaces, preprint 2023 (arXiv).

[Se] C. Searle, Symmetries of spaces with lower curvature bounds, *Notices Amer. Math. Soc.*, April, 2023.

[WZ] M. Y. Wang, W. Ziller, On normal homogeneous Einstein manifolds, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **18** (1985), 563-633.