Matemática en la orilla

Spinoza y la teoría de conjuntos

Mateo Chialvo y Mateo Marengo Cano

Universidad Nacional de Córdoba

2022

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Si alguien le pidiera a usted, quien sea que esté leyendo esto, que presente algunos ejemplos de aplicaciones de la matemática, seguramente se le vendrían a la cabeza una multitud de ellos, y muy probablemente en una enorme variedad. Piense, esta oración está aquí sólo para dejarle suficiente tiempo como para que imagine dos o tres ejemplos, aún cuando no le hayamos pedido que lo haga. Ahora seguimos con la introducción. Aplicaciones en química, en biología, en física, en artes, sin mencionar ingeniería, en arquitectura, economía, medicina, ¡ecología!, matemagia, matemática de la vida cotidiana. Matemática -no tan- escondida en las cuentas del supermercado y en las facturas de luz, en la organización de los semáforos de una ciudad, en pinturas, en los cimientos de la casa. En fin, si le siguieran presionando para dar ejemplos, llegaría un momento en el que estaría, o al menos nosotros estamos tentados de decir: la matemática está (¿o es?) en todas partes.

Ya si hubiera que precisar ejemplos de aplicaciones, o incluso de matemática aplicada, ejemplos específicos, bastaría con ir a la gran bolsa del cálculo diferencial, revisar análisis numérico, abrir el apunte de probabilidad. Quizás nos equivoquemos, es algo que solemos hacer, pero nos parece habitual pensar en la aplicación matemática como una cosa en mayor o menor medida concreta, y fundamentalmente, útil, en un vago sentido de utilidad. Es cierto que quizás esa cosa concreta no sea tan concreta como calcular la velocidad de la pelota que patea Juan; pero quizás imaginamos algo como la construcción de paneles solares, elaboración de algoritmos inentendibles para clasificar grandes cantidades de datos, o algo por el estilo. Esta monografía se tratará esencialmente de ofrecer otro curioso ejemplo, para cuando llegue el momento en que le pregunten por la matemática aplicada. Y si la monografía logra hacer reflexionar sobre las modalidades de aplicación matemática, tanto mejor.

Quienes conozcan a Spinoza probablemente intuyan por dónde iremos. Baruch Spinoza (1632-1677) fue un importante filósofo holandés cuya obra magna fue la *Ética demostrada según el órden geométrico*. Así pues, esta monografía habitará el conocido terreno de interacción entre filosofía y matemática -en particular, la Teoría de Conjuntos- valiéndose de algunos artículos y de la Ética de Spinoza. La relación entre filosofía y matemática no es desconocida, ciertamente. El mismo Cantor (1845-1918), «padre» de la teoría de conjuntos, estuvo siempre muy preocupado por la filosofía que nutría a la matemática y por la que emanaba de ella. No será trabajo de esta monografía mostrar o estudiar la historia de esta relación, pero sí nos basta observar que es posible la confusión según cual la relación sólo puede sobrevivir en un plano elemental [como se pensaría, quizás, de la paradoja de Aquiles y la Tortuga, o, volviendo a la convicción de las "aplicaciones concretas", las inteligencias artificiales]. Confusión que, por lo pronto, es también nuestra confusión. Precisamente hay un campo no tan extendido pero lo suficientemente fértil como para habitarlo, al menos por un tiempo.

Lo que sí haremos es ofrecer algunos ingredientes de teoría de conjuntos, para luego trabajar esta posible interacción de la siguiente manera: primero, tomaremos un artículo que enuncia teoremas puramente conjuntistas inspirados, según el autor, directamente en la Ética. Esta «inspiración» nos resulta extremadamente peculiar: en efecto, no se trata de pretender hacer una traducción uno a uno de un texto filosófico a uno matemático, sino tomar alguna idea para elaborar con ella una cosa distinta. Trataremos de, a partir de estos teoremas, introducirnos en la filosofía de Spinoza.

Luego, trabajaremos con un segundo artículo, en el que se parte precisamente de una inspiración que Spinoza pudo haberle producido a Cantor, para elaborar su propia concepción matemática del infinito. El artículo propone un paralelismo entre el concepto de infinito en Spinoza y el concepto de infinito en Cantor. Lo que nos interesa de esta parte es mostrar cómo la matemática podría ser útil a la filosofía para profundizar en el estudio, en este caso, de un filósofo de suma importancia, en particular en Latinoamérica y Argentina[1], aportando las herramientas de una rama fundamental en la matemática[2]. Esto ofrece no sólo la posibilidad de encontrar en la matemática ese servicio para la comprensión de otras cosas (su aplicación), sino la posibilidad de continuar elevando los mínimos de matemática disponible para gente de otras áreas, incluso aquellas que pueden trabajar casi sin matemática. Y a la inversa, ofrecer a quien haga matemática otros contenidos que la desborden un poco.

La filosofía de Spinoza ofrece un extraño lente con el cual intentar mirar la Teoría de Conjuntos. El criterio será desglosar el artículo para mostrar qué tipo de trabajo le espera a quien se entusiasme y pretenda poner manos a la obra (en este caso se trata de una gran obra).

Dos opciones entonces: mirar la teoría de conjuntos desde Spinoza, o mirar Spinoza desde la teoría de conjuntos.

Brindaremos también algunos ejemplos a modo de curiosidad, de otros trabajos en el terreno, esta vez en lógica y lógica modal.

[1] Cabe destacar que en Córdoba está el grupo de estudios Spinozistas que, hemos podido averiguar, aún no cuenta con matemáticos.

[2] Imaginemos a alguien que de repente invoca para su clase de filosofía, con extraña naturalidad, el concepto de ordinal.

Capítulo 2

Inspiraciones raras

2.1. Introducción a Teoría de Conjuntos

Como mencionábamos, uno de nuestros ingredientes será la Teoría de Conjuntos. Como es una cosa muy amplia y quizás no trabajada con demasiada formalidad, destinaremos unas páginas para que cualquiera con algo de ganas pueda comprender lo esencial de la monografía. Por supuesto que daremos descontadas algunas herramientas matemáticas.

Definición 1. Una *relación binaria* sobre un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$. Es decir que es un conjunto de pares ordenados.

Si R es una relación binaria sobre A muchas veces diremos que aRb para referirnos a que $(a,b) \in R$.

Además, diremos que una relación binaria es:

- *Reflexiva* si $xRx\ \forall x \in A$
- *Transitiva* si $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz\ \forall x,y,z \in A$
- *Simétrica* si $xRy \rightarrow yRx\ \forall x,y \in A$
- *Antisimétrica* si $xRy \wedge yRx \rightarrow x = y\ \forall x,y \in A$

Definición 2. Una *relación de equivalencia* sobre un conjunto A es una relación binaria reflexiva, transitiva y simétrica.

Con esto en mente atendamos a la que quizás sea la definición más importante para comprender las partes siguientes:

Definición 3. Diremos que $\mathcal{P}$ es una *partición* de un conjunto A si:

- Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacío de A
- Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P} \rightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing$
- $A = \{a : a \in S$, para algún $S \in \mathcal{P}\}$

Precisamente una partición "parte" a un determinado conjunto en varios subconjuntos no vacíos, disjuntos entre sí y en cuya unión podemos encontrar nuevamente a A.

Si tenemos una partición $\mathcal{P}$ de un conjunto A entonces podemos definir una relación binaria asociada a dicha partición, $R_{\mathcal{P}} = \{(a,b) : a,b \in S$, para algún $S \in \mathcal{P}\}$. Esta relación es de equivalencia, y es un excelente ejercicio probarlo para entrar en calor.

A su vez, si tenemos una relación de equivalencia R sobre A podemos ver que A/R es una partición de A, donde A/R consiste en tomar como los subconjuntos de la partición a los elementos relacionados entre sí por R.

Definición 4. Dos conjuntos A y B son *coordinables* (o son del mismo tamaño) si hay una biyección de A en B. Notación: $|A| = |B|$.

Ser coordinable también forma una relación de equivalencia.

Definición 5. Diremos que A es de *menor tamaño* que B, si A es coordinable con un subconjunto de B. Notación: $|A| \leqslant |B|$.

Es claro que $|A| \leqslant |B|$ sii hay $f : A \to B$ inyectiva. Además, $\leqslant$ es transitiva y reflexiva.

Teorema 1 (Cantor, Schröder, Bernstein)**.** Si $|A| \leqslant |B|$ y $|B| \leqslant |A|$ entonces $|A| = |B|$.

□

Definición 6. Un conjunto A es *finito* si hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = |\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}|$.

De la definición se desprende que $\varnothing$ es finito.

Un conjunto es *numerable* (*contable*) si es finito o coordinable con $\mathbb{N}$. A su vez, es *no numerable* (*incontable*) en caso contrario. Si un conjunto es numerable, sus elementos pueden acomodarse todos (posiblemente con repeticiones) en una lista de la forma

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

Definición 7. Llamaremos *orden parcial* sobre A a una relación binaria R si es reflexiva, transitiva y antisimétrica respecto de A, y la denotaremos $\leqslant$.

Con todo esto, diremos que un *conjunto parcialmente ordenado o poset* es un par $(P, \leqslant)$ donde P es un conjunto no vacío y $\leqslant$ es un orden parcial sobre P.

Un *isomorfismo* entre dos posets, $\mathbf{P} = (P, \leqslant^P)$ y $\mathbf{Q} = (Q, \leqslant^Q)$ es una función biyectiva $f : P \to Q$ tal que $x \leqslant^P y \leftrightarrow f(x) \leqslant^Q f(y)$. Si existe tal f diremos que los posets son isomorfos y escribiremos $\mathbf{P} \simeq \mathbf{Q}$.

Entonces un isomorfismo es una función que nos lleva y trae de un poset a otro manteniendo las relaciones entre los elementos. Esta es una idea que también nos resultará de suma importancia para las partes siguientes.

Por ejemplo, se puede ver que $(\mathbb{R}, \leqslant)$ (el conjunto de los números reales con el orden usual) y $(\mathbb{R}, \geqslant)$ (el conjunto de los números reales ordenados "al revés") son isomorfos como posets, ya que $x \leqslant y$ sii $-x \geqslant -y$.

Definición 8. Un *conjunto totalmente ordenado* es un poset $(P, \leqslant)$ donde la relación $\leqslant$ además cumple que $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$ para todos $a, b \in P$.

Definición 9. Dados un poset A y $a, b \in A$ diremos que a es *menor estricto* que b, $a < b$ sii $a \leqslant b$ y $a \neq b$.

Definición 10. Dado $(P, \leqslant)$ poset diremos que $a \in P$ es un elemento *minimal* si no existe $b \in P$ tal que $b < a$. Y diremos que $a \in P$ es elemento mínimo si $a \leqslant b \ \forall b \in P$.

Definición 11. Dado un conjunto A y una relación binaria R sobre A diremos que R es *bien fundada* si todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento minimal (respecto de R), esto es que:

$$\forall X \subset A(X \neq \varnothing \to m \in X \forall x \in X(x \not R m))$$

Definición 12. Una relación binaria R es un *buen orden* si es un orden total bien fundado.

Además diremos que un conjunto A es *transitivo* si contiene a cada uno de sus miembros, es decir:

$$(\forall a \in A)\,(\forall x \in a)\ x \in A.$$

Por ejemplo $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ y $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ son transitivos pero $\{\{\varnothing\}\}$ no lo es.

Acá viene otra definición importante:

Definición 13. Y diremos que un conjunto α es un *ordinal* si es transitivo y está bien ordenado bajo la relación "pertenece" $= \in := \{(x,y) : x, y \in \alpha \wedge x \in y\}$. La clase de los ordinales será denotada por Ord.

Por ejemplo, podemos asignar a cada número natural n un conjunto O_n de n elementos. Una forma de hacerlo es la siguiente (de manera recursiva):

- $O_0 \leftrightarrow \varnothing$
- $O_n \leftrightarrow n \cup \{n\}$.

Podemos quitar la 'O' y redefinir a cada número natural k como O_k, su conjunto asociado. Luego, por ejemplo, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, que $0 \in 2$, y entonces $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ es un conjunto de conjuntos.

De acuerdo a nuestra humilde experiencia, los ordinales no son sencillos de comprender. No sólo que no son sencillos de comprender sino que tampoco es sencillo operar con ellos. Para tratar de entenderlos, veamos algunas propiedades:

Proposición 1. Todo elemento de un ordinal es un ordinal.

$\square$

Dado un ordinal α definimos $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$, el *sucesor* de α. Un *ordinal límite* es un ordinal distinto de 0 y que no es sucesor de ningún ordinal.

Por ejemplo, el $1 = 0^+$ (naturalmente!). Un ordinal límite es, por ejemplo, ω.

Lema 1. Si α es un ordinal entonces α^+ también.

$\square$

Corolario 1. Cada $n \in \omega$ es un ordinal.

$\square$

Dado α, β ordinales escribimos $\alpha \leqslant \beta$ para denotar que $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$. $\alpha < \beta$ significa $\alpha \in \beta$. (Recordar que un ordinal está bien ordenado bajo la relación $\in$)

Lema 2. Sean α y β ordinales. Entonces:

1. $0 \leqslant \alpha$.
2. $\alpha \nless \alpha$, i.e., $\alpha \notin \alpha$.
3. $\alpha \cap \beta$ es un ordinal.
4. Si $\alpha \subseteq \beta$ entonces $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$. Luego $\subseteq$ coincide con $\leqslant$ para ordinales.
5. Si $\alpha < \beta$ entonces $\alpha^+ \leqslant \beta$, y si β es un ordinal límite entonces $\alpha^+ < \beta$.

□

Como se ve, el comportamiento de los ordinales es llamativo. Entre algunas cosas, es que teniendo en cuenta la definición de sucesor, cada ordinal puede representarse como el conjunto de sus predecesores. Esta enunciación elemental la necesitaremos para más adelante, porque es exactamente la manera en la que en un artículo entienden el ordinal. Otro resultado interesante es:

Teorema 2 (Principio del Buen Orden)**.** Todo conjunto tiene un buen orden.

□

Y aquí ofrecemos el recurso que más vamos a utilizar en las pocas (e innecesarias para la comprensión) demostraciones que daremos en las próximas secciones:

Proposición 2 (Inducción Transfinita)**.** Sea $P(\alpha)$ una propiedad de ordinales. Supongamos que para cada ordinal β tenemos que si $P(\gamma)$ vale para todo $\gamma < \beta$, entonces vale $P(\beta)$. Entonces $P(\alpha)$ es válida para todo ordinal α.

□

Teorema 3. Sea R un buen orden sobre A. Luego hay a lo sumo un $\alpha \in Ord$ y un isomorfismo $h : (A,R) \to (\alpha,\in)$.

□

Definición 14. En caso de existir un ordinal y un isomorfismo como en el teorema anterior llamaremos a dicho ordinal el *tipo de orden* de (A,R) y se denotará como $type(A,R)$.

Definición 15. Dada una relación binaria R sobre un conjunto A llamaremos *clausura transitiva* de R sobre A a la menor relación sobre A que contiene a R y es transitiva. Se denotará como R^*.

Definición 16. La *clausura transitiva* de un conjunto X es el menor conjunto transitivo que incluye a X y la denotaremos como $trcl(X)$. Se puede probar que:

$trcl(X) = \{X\} \cup X \cup (\bigcup X) \cup (\bigcup\bigcup X) \cup \ldots$.

Donde $\bigcup X$ es la unión de los elementos (que son conjuntos) de X

Por ejemplo,

$trcl(\{\{\varnothing\}\}) = \{\{\{\varnothing\}\}\} \cup \{\{\varnothing\}\} \cup (\bigcup\{\{\varnothing\}\}) = \{\{\{\varnothing\}\}\} \cup \{\{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing\} = \{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing\},\varnothing\}$

Definición 17. El *cardinal* de un conjunto A, denotado por $|A|$, es el menor ordinal coordinable con A. Un *cardinal* es un ordinal que no es biyectivo con ningún ordinal menor.

Por ejemplo todo $n \in \omega$ y ω son cardinales, pero ω^+ no.

Es sencillo ver que no puede haber un último cardinal κ, puesto que $\kappa = |\kappa| < |\mathcal{P}(\kappa)|$.

2.2. La partición Spinozista

Habiendo hecho una breve introducción a la teoría de conjuntos, vamos a trabajar con *Some Set-Theoretical Partition Theorems Suggest by the Structure of Spinoza's God*[3], de Friedman. Esta parte, todavía, será casi exclusivamente matemática. Una aclaración importante es que no es fundamental entrar en el detalle de las demostraciones para comprender la monografía, están puestas acá primero porque, a diferencia de lo anterior, puede resultar novedoso para quien tenga conocimiento de Teoría de Conjuntos y segundo porque, si se siguen con atención, son perfectamente entendibles.

Veamos de qué se trata:

«The purpose of this paper is not merely to prove some settheoretical theorems or to make a few related conjectures, but also to show how such theorems and conjectures are directly suggested by Spinoza's metaphysical system. Speaking generally, traditional metaphysical systems are not given as formal mathematical systems. Therefore, they are not strictly comparable with such mathematical systems. Thus, there is no question of isomorphism between metaphysical and mathematical systems (or between any of their subsystems). However, it is our general thesis that metaphysical systems do contain sufficiently general, primitive, and intuitive concepts and principles so as to suggest, and even generate, mathematical (and also scientific) concepts and principles; and conversely.»

Nuestra humilde traducción:

«El propósito de este paper no es solamente probar algunos teoremas de teoría de conjuntos o elaborar algunas conjeturas, sino además mostrar cuántos teoremas y conjeturas son directamente sugeridos por el sistema metafísico de Spinoza. Hablando en sentido amplio, los sistemas metafísicos tradicionales no son dados como sistemas matemáticos formales. Por lo tanto, no son estrictamente comparables con sistemas matemáticos. No es el propósito proponer un isomorfismo entre sistemas metafísicos y matemáticos (o entre subsistemas). Sin embargo, nuestra tesis general es que los sistemas metafísicos contienen conceptos y principios suficientes, primitivos e intuitivos como para sugerir e incluso generar conceptos y principios matemáticos; también al revés.»

El camino de Friedman consiste en hacer una rápida elección conjuntista de ciertas partes de la Ética, sin preocuparle demasiado qué opinión le hubiera merecido a Spinoza dicha elección. Lo que haremos es presentar el trabajo de Friedman sin ocuparnos de Spinoza, para luego utilizarlo como una introducción a algunas ideas de Spinoza, tal como anticipamos en la introducción.

Definición 18. X es una *partición Spinozista* de Y sii $X = \{A_\beta : \beta < |X|\}$ donde $Y = \bigcup A_\beta$ y $A_\beta \cap A_\gamma = \varnothing$ si $\beta \neq \gamma < |X|$ y tal que $|A_\beta| = |X|$ para todo β y por último $A_\beta \simeq_\in A_\gamma$ para $\beta, \gamma < |X|$, esto es que existe una biyección $f : A_\beta \to A_\gamma$ tal que $\forall x, y \in A_\beta, x \in y \leftrightarrow f(x) \in f(y)$.

Por supuesto, no hay que ignorar el nombre de la partición. La definición anterior es indudablmente la gema de la sección. Más adelante veremos por qué se llama así. La primera pregunta que surge es si, para algún conjunto o bien para alguna clase, existe una tal partición. Lo que sigue se tratará precisamente de demostrar que existe una partición spinozista de V_ω (que definiremos más adelante).

Definición 19. Definimos recursivamente: $x^* = \{\varnothing\}$ si $x = \varnothing$; y $x^* = \{y^* | y \in x\}$ si $x \neq \varnothing$

Por ejemplo, si $x = \{\varnothing\}$ entonces $x^* = \{\{\varnothing\}\}$ y si $z = \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$ entonces $z^* = \{\{\{\varnothing\}, \varnothing\}\}$. Es decir que podemos pensar a * como "agregar llaves".

Prestar cuidadosa atención al hecho de sólo distinguiremos con mayúsculas a ciertos conjuntos, pero ya debería estar en claro que las minúsculas también representan conjuntos. A continuación probaremos varios lemas.

Lema 3. $x^* \neq \emptyset$ para todo x.

Demostración. Inmediato de la definición. □

Lema 4. * es inyectiva.

Demostración. Por inducción. Tomamos como hipótesis inductiva que $(\forall t \in x)(\forall y)(t^* = y^* \to t = y)$. Supongamos ahora que $x^* = y^*$ y veamos que $x = y$.

$x \subset y$: Supongamos $t \in x$, por lo que $x \neq \emptyset$ y entonces $x^* = \{z^* | z \in x\}$. Además $t^* \in x^* = y^*$ y entonces $t^* = z^*$ para algún $z \in y$. Así, por hipótesis inductiva, $t = z$ y por lo tanto $t \in y$.

La otra contención es similar. □

Lema 5. $(\forall x)(\forall y)(x \in y \leftrightarrow x^* \in y^*)$

Demostración. $\to$: Directo de la definición de *.

$\leftarrow$: Supongamos $x^* \in y^*$. Por Lema 3 $x^* \neq \emptyset$ y entonces $y^* \neq \{\emptyset\}$ que resulta en $y \neq \emptyset$ por definición de *. Así $x^* = z^*$ para algún $z \in y$. Por Lema 4 $x = z$ y por lo tanto $x \in y$. □

Lema 6. $(\forall y)(y \neq \emptyset \to \emptyset \notin y^*)$

Demostración. Inmediato del Lema 3 y la definición de *. □

Lema 7. $(\forall x)(\forall y)(y \in trcl(x^*) \wedge y \neq \emptyset \to (\exists z) y = z^*)$

Demostración. Nuevamente por inducción en x. Supongamos que vale para todo $t \in x$. Sea $y \in trcl(x^*)$ e $y \neq \emptyset$. Trabajaremos por casos.

Caso 1: $y = x^*$ trivial.

Caso 2: $y \in x^*$. $x \neq \emptyset$ pues $y \neq \emptyset$. Así $y = t^*$ para algún $t \in x$.

Caso 3: $y \in trcl(x)$, $t \in x^*$ e $y \neq t$. Notemos que $t \neq \emptyset$, pues de lo contrario sería $y = \emptyset$ lo cual es absurdo. Así $x \neq \emptyset$ y también $t = w$ para algún $w \in x$. Por lo que $y \in trcl(w^*)$ y listo por hipótesis inductiva. □

Definición 20. Definimos recursivamente: $V_0 = \emptyset$, $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$, $V_\omega = \bigcup_n V_n$.

Donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de X.

Aprovechemos para recordar que buscamos una partición Spinoziana de V_ω. Y para esto definiremos, también recursivamente, una secuencia de longitud ω que generará la partición deseada de V_ω.

$A_0 = \{x \in V_\omega | (\exists y \in trcl(x)(\emptyset \in y \wedge y \neq \{\emptyset\})\} \cup \{\emptyset\}$, $A_{n+1} = A_n^*$.

Tomando $X = \{A_n | n < \omega\}$, vamos a demostrar que dicho X es partición Spinoziana de V_ω. Pero para esto hace falta un largo camino.

Lema 8. $(\forall x)(x^* \notin A_0)$

Demostración. Supongamos que $x^* \in A_0$. Por Lema 3 $x^* \neq \emptyset$, entonces por definición de A_0, $(\exists y \in trcl(x^*))(\emptyset \in y \wedge y \neq \{\emptyset\})$. Por eso, $y \neq \emptyset$ y por Lema 7 $(\exists z) y = z^*$. Entonces $\emptyset \in z^*$ y en virtud del Lema 6 resulta $z = \emptyset$. Por lo tanto $y = \{\emptyset\}$, lo cual es absurdo. □

Definición 21. Definimos recursivamente: $x^{*(0)} = x$, $x^{*(1)} = x^*$, $x^{*(n+1)} = (x^{*(n)})^*$

Lema 9. $(\forall x)(x \in V_\omega - A_0 \wedge x \neq \{\emptyset\} \to x \subset V_\omega - A_0)$

Demostración. Supongamos $x \in V_\omega - A_0 \wedge x \neq \{\emptyset\}$. Como $\emptyset \in A_0$ tenemos que $x \neq \emptyset$. Entonces podemos escribir $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ donde $x_1, \ldots, x_n$ son todos conjuntos distintos. Notemos que $\emptyset \notin x$ pues en caso contrario tendríamos $x \in A_0$. Ahora sea $z \in x$ y veamos que $z \in V_\omega - A_0$. Como $z \in x \in V_\omega$ tenemos que $z \in V_\omega$. Supongamos ahora que $z \in A_0$, como $z \in A_0 - \{\emptyset\}$ entonces $(\exists y \in trcl(z))(\emptyset \in y \wedge y \neq \{\emptyset\}$. Además $(\exists y \in trcl(x))(\emptyset \in y \wedge y \neq \{\emptyset\}$ pues $trcl(z) \subset trcl(x)$, lo que implica que $x \in A_0$ lo cual es absurdo. Y esto completa la prueba puesto que mostramos que $z \notin A_0$. □

Definición 22. Definimos x^{-*} como el único y tal que $x = y^*$ si dicho y existe; caso contrario $x^{-*} = x$.

Definición 23. Definimos recursivamente: $x^{-*(0)} = x$, $x^{-*(1)} = x^{-*}$, $x^{-*(n+1)} = (x^{-*(n)})^{-*}$

Lema 10. $(\forall x)(x \in V_\omega - A_0 \to (\exists n > 0) x^{-*(n)} \in A_0)$

Demostración. Lo haremos por inducción en x. Supongamos que el enunciado vale para todo $y \in x$ y también que $x \in V_\omega - A_0$. Como $\emptyset \in A_0$ entonces $x \neq \emptyset$.

Caso 1: $x = \{\emptyset\} = \emptyset^*$, entonces $x^{-*(1)} = \emptyset \in A_0$.

Caso 2: $x \neq \{\emptyset\}$. Como en el Lema anterior $x = \{x_1, \ldots, x_k\}$ para distintos $x_i's$. Por el Lema 9 tenemos que $x \subset V_\omega - A_0$. Por hipótesis inductiva tenemos que para cada $x_i \in x$, $(\exists n > 0) x^{-*(n)} \in A_0$ y entonces sea n_i el mínimo con esa propiedad para cada i. Entonces $n_i > 0$ y $x^{-*(n_i)} \in A_0$. Tomemos ahora $m = min\{n_i\} > 0$ y consideremos el conjunto $z_0 = \{x_1^{-*(m)}, \ldots, x_k^{-*(m)}\}$. Es claro que no todos los $x_i^{-*(m)}$ son $\emptyset$ ya que los x_i son distintos.

Caso 2A: Algún $x_i^{-*(m)} = \emptyset$, entonces $z_0 \in A_0$.

Caso 2B: Todos los $x_i^{-*(m)} \neq \emptyset$. Pero algún $x_i^{-*(m)} \in A_0$ ya que $m = n_i$ para algún i. Por lo tanto $(\exists y \in trcl(x_i^{-*(m)})(\emptyset \in y \wedge y \neq \{\emptyset\})$ y entonces $(\exists y \in trcl(z_0)(\emptyset \in y \wedge y \neq \{\emptyset\})$.

Así $z_0 \in A_0$ en ambos casos. Por lo que resulta $z_0^{-*(m)} = x$ y de este modo $x^{-*(m)} \in A_0$. □

Lema 11. $(\forall x)(x \in V_\omega \leftrightarrow x^* \in V_\omega)$

Se puede probar facilmente por inducción.

Con todo esto estamos listos para demostrar lo que queríamos, es decir:

Teorema 4. Existe una partición Spinozista de V_ω

Demostración. Sea $X = \{A_n | n < \omega\}$ y comprobemos que satisface todos los puntos de la definición de partición Spinozista.

Primero veamos que $A_i \simeq_\in A_j$ para todo $i, j < \omega$. Por los Lemas 4 y 5 es fácil notar que si $Z \neq \varnothing$ entonces $Z \simeq_\in Z^*$ pues $Z^* = \{t^* | t \in Z\}$. Por lo tanto $A_0 \simeq_\in A_0^* = A_1 \simeq_\in A_1^* = A_2 \simeq_\in \ldots$. Así, por transitividad de $\simeq_\in$ tenemos lo deseado.

Ahora, para ver que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$ supongamos por el absurdo que $\exists x$ tal que $x \in A_i \cap A_j$ con $j < i$. Entonces $x = z_1^{*(i)}$ para algún $z_1 \in A_0$ y también $x = z_2^{*(j)}$ para algún $z_2 \in A_0$, por lo que $z_1^{*(i)} = z_2^{*(j)}$ y entonces $z_2 = z_1^{*(i-j)}$. Por lo tanto tenemos que $z_2 = z^*$ para algún $z \notin A_0$ por Lema 8 y entonces $z_2 \notin A_0$ lo cual es absurdo.

Luego, como $\omega - \{\{\varnothing\}\} \subset A_0$ tenemos que $|A_0| = \omega$ y gracias a la primera parte de la demostración, $|A_0| = |A_k| = \omega$ para todo $k < \omega$. Y como $A_i \neq A_j$ para todo $i \neq j$ obtenemos que $|X| = \omega$. Así tenemos $|A_0| = |A_k| = \omega = |X|$.

Por último debemos ver que $V_\omega = \bigcup X$.

$\subseteq$: Sea $y \in V_\omega$. Si $y \in A_0$, listo. Y si, $y \notin A_0$ entonces $y \in V_\omega - A_0$ y por Lema 10 tenemos que existe $n > 0$ tal que $y^{-*(n)} \in A_0$ y tomemos m el mínimo que cumple lo mencionado. Entonces existe $z \in A_0$ tal que $y = z^{*(m)}$, por lo que $y \in A_m$ e $y \in \bigcup X$.

$\supseteq$: Supongamos $y \in \bigcup X$. Entonces $y \in A_k$ para algún $k < \omega$ y así tenemos que existe $z \in A_0$ tal que $y = z^{*(k)}$ y $z \in V_\omega$ por lo que gracias al Lema 11 tenemos que $y \in V_\omega$. □

Entonces queda demostrado que existe una partición Spinozista de V_ω. Un problema abierto es, por ejemplo, si existe alguna partición Spinozista de V.

2.3. Cómo poner un nombre

Hasta ahora, bien podría parecer que estos resultados son lo que en nuestra jerga se conoce como «galerazo». Pero, como en general ocurre, no se trata de eso. Emprendamos un pequeño recorrido para entender en dónde esa «inspiración» se hace patente, antes, algunos comentarios:

La necesidad de procurar un mínimo de elementos matemáticos para una mejor comprensión de la Ética de Spinoza no es desconocida, por la forma que tiene el mismo planteamiento del texto (i.e. tiene una arquitectura 'en orden geométrico', en la que tiene definiciones, axiomas, teoremas, con sus demostraciones) y también por la relación de Spinoza con la matemática de su época. Hay numerosas experiencias en las que se procuró un tratamiento matemático: las aproximaciones que hizo Deleuze por vía de los infinitesimales (Deleuze, 2003), los trabajos de formalización como el de Sierra Marquez (2017) en el que realmente se traduce buena parte de la Ética en lógica de primer orden; y, similarmente, *Ontological Argument and Infinity in Spinoza's Thought* (Usó-Doménech et al, 2019), en el que se propone un 'diccionario': una forma de expresar una relación uno a uno entre las definiciones de la Ética y la teoría de conjuntos (además de proponer una formalización del argumento ontológico de Spinoza en lógica modal).

Por ejemplo, y principalmente para dar una idea del orden geométrico, la Ética empieza así:

Definiciones:

1. Por causa de sí entiendo aquello cuya esencia implica la existencia, o sea, aquello cuya naturaleza no se puede concebir sino como existente.

2. Se llama finita en su género aquella cosa que puede ser limitada por otra de la misma naturaleza. Por ejemplo, se dice que un cuerpo es finito, porque siempre concebimos otro mayor. Y así también un pensamiento es limitado por otro pensamiento. Pero un cuerpo no es limitado por un pensamiento ni un pensamiento por un cuerpo.

3. Por sustancia entiendo aquello que es en sí y se concibe por sí, es decir, aquello cuyo concepto no necesita el concepto de otra cosa, por el que deba ser formado.

4. Por atributo entiendo aquello que el entendimiento percibe de la sustancia como constitutivo de su esencia.

5. Por modo entiendo las afecciones de la sustancia, o sea, aquello que es en otro, por medio del cual también es concebido.

6. Por Dios entiendo el ser absolutamente infinito, es decir, la sustancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita.

Explicación: Digo absolutamente infinito, y no en su género, porque de aquello que sólo es infinito en su género podemos negar infinitos atributos; en cambio, si algo es absolutamente infinito, pertenece a su esencia todo lo que expresa esencia y no implica negación alguna.

7. Se llamará libre aquella cosa que existe por la sola necesidad de su naturaleza y se determina por sí sola a obrar. Necesaria, en cambio, o más bien coaccionada, aquella que es determinada por otra a existir y a obrar según una razón cierta y determinada.

8. Por eternidad entiendo la existencia misma, en cuanto se concibe que se sigue necesariamente de la sola definición de una cosa eterna.

Explicación: Pues tal existencia se concibe como una verdad eterna, lo mismo que la esencia de la cosa; y, por tanto, no se puede explicar por la duración o el tiempo, aunque se conciba que la duración carece de principio y de fin.

AXIOMAS 1. Todo lo que es, o es en sí o en otro.

2. Lo que no se puede concebir por otro, se debe concebir por sí.

3. De una determinada causa dada se sigue necesariamente un efecto y, al contrario, si no se da ninguna causa determinada, es imposible que se siga un efecto.

4. El conocimiento del efecto depende del conocimiento de la causa y lo implica.

5. Las cosas que no tienen nada común unas con otras, tampoco se pueden entender unas por otras, o sea, que el concepto de la una no implica el concepto de la otra.

6. La idea verdadera debe concordar con su objeto ideado.

7. De todo lo que se puede concebir como no existente, la esencia no implica la existencia.

Evidentemente algunas de las cosas dichas resultarán vagamente familiares (por ejemplo, aparece la expresión «absolutamente infinito», que podría tranquilamente ser un concepto de funciones reales). La arquitectura también debe sonar familiar, al fin y al cabo hay definiciones, aunque ocasionalmente inentendibles, raras e inesperadas, y axiomas. Y, eventualmente, veremos algunas proposiciones.

Lo que Friedman va a tomar como inspiración para sus teoremas de partición requiere un trabajo concienzudo. Léase nuevamente la definición de sustancia. Spinoza va a demostrar que existe una sola sustancia (es decir: una única cosa que es en sí y se concibe por sí...): y esa sustancia es Dios, es decir, la sustancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita. A su vez, están los modos (definición 5), que son las afecciones de la sustancia, y que guardan una relación especial con el infinito que atenderemos más adelante. Lo que ocurre es que los atributos, es decir lo que se percibe como constitutivo de la sustancia, no comparten modos. En términos de Friedman: «los atributos no son interdefinibles, cualesquiera dos atributos son conceptualmente independientes». Tratemos de tomar las cosas prácticamente literales. Ahora bien, a pesar de esta «intersección vacía» entre los atributos, en la misma Ética, Spinoza va a dar una proposición en la que se plantea algo así como un isomorfismo entre cualesquiera dos atributos. No hay que alarmarse: hay una sustancia, que es Dios, están los atributos de Dios, y los modos que corresponden a cada atributo de manera tal de dos atributos distintos no comparten modo.

La idea de fondo en la interpretación de Friedman es que los atributos particionan a la sustancia de una determinada manera. Esa manera de partir, da lugar a la partición Spinozista que conocemos. Friedman está pensando en infinitos atributos A_i como conjuntos de ciertos elementos: los modos. Estos A_i son disjuntos. Luego, el Dios de Spinoza adaptado por Friedman sería $Dios_s = \{A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$. A su vez, la unión $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_j \cup \ldots$ representa la unión de todas las cosas, es la "totalidad de la realidad". Notar que Dios es, en algún sentido, la totalidad de las cosas, pero es una cosa distinta que "la suma de sus partes". Con esto, Friedman quiere capturar una idea compleja en Spinoza. Claro que de una manera simplificada y sin la necesidad de ser extremadamente consecuente con Spinoza. Por ejemplo, como veremos más adelante, no está claro que los atributos puedan tomarse como conjuntos. La idea de que sean disjuntos y que vayan a constituir una cierta partición, busca capturar la idea de que no comparten, en este caso, modos, Pero hay otra cosa que Spinoza tendrá en cuenta: que los atributos son máximos en su género y de algún modo "bastan" para determinar a la sustancia. No está claro que la partición así definida alcance.

¿Se puede mejorar la definición? Esta es una pregunta abierta que nosotros nos hicimos.

Pero decíamos que para Spinoza estos atributos son, de algún modo, isomorfos. ¿Cómo expresa Friedman el isomorfismo entre atributos? Ya lo sabemos: $A_\beta \simeq_\in A_\gamma$ para $\beta, \gamma < |X|$, es decir, que existe una biyección $f : A_\beta \to A_\gamma$ tal que $\forall x, y \in A_\beta, x \in y \leftrightarrow f(x) \in f(y)$.

Esto es apenas un vistazo veloz. Presentamos un resultado exclusivamente matemático que, para colmo, deja algunos problemas abiertos. Por ejemplo: ¿Existe alguna partición Spinozista de la clase universal V, la clase de todos los conjuntos? Pero ese resultado provino por «inspiración» de la Ética ¡Fascinante! Imaginémoslo, para jugar, como un proceso extremadamente simple. Estudiando observamos que mirando al Dios de Spinoza con el lente de cada uno de sus infinitos atributos vemos objetos distintos pero que guardan una relación. Estos atributos a su vez son máximos en su género. Y estas ideas nos hacen pesar en una partición que cumple ciertas condiciones, que puede definirse matemáticamente y por cuya existencia uno puede comenzar a trabajar en matemática.

Ahora hagamos otro ejercicio. Imaginemos que la partición logra realmente expresar el funcionamiento de al menos una parte del sistema metafísico de Spinoza, lo cual no es del todo errado, y por lo tanto hay un recurso matemático más a disposición de cierta filosofía. Pero vayamos más allá con la idea que Friedman expuso en la cita que compartimos ¿Sería posible que un resultado matemático obtenido a partir de esa inspiración pueda nuevamente volcarse a la filosofía de Spinoza?¿Podría re-leerse en clave Spinozista?

Capítulo 3

Spinoza en una cáscara de nuez

3.1. Adentrándonos en Spinoza sin soltar la linterna matemática

Es posible que el final de la sección anterior le haya dejado a usted, que quiere poder tener alguna claridad sobre esta rara aplicación matemática, sabor a poco. En esta sección daremos un poquito más de Spinoza, pero siguiendo con la mirada conjuntista del asunto, esta vez con una matemática aligerada para darle paso a Spinoza. E incorporaremos otra de las herramientas ofrecidas en la introducción: los ordinales y cardinales. Porque ocurre que Cantor, «el padre» de los números transfinitos, menciona explícitamente en su correspondencia, haber encontrado en Spinoza algunos puntos fuertes para dar respaldo filosófico a la matemática en la que pensaba, o bien, quizás, había encontrado que a partir de ciertos postulados filosóficos era capaz de extraer y elaborar matemática pura. Para dar una idea de la enorme preocupación de Cantor y de la meticulosidad de su estudio, se puede recordar que, como se menciona en [2], copió las definiciones, axiomas y proposiciones de la Ética en un cuaderno para hacer una lectura comentada (cuya traducción al inglés puede leerse en el mismo artículo). Esa minuciosidad en la lectura no era para Cantor una actividad que concibiera separadamente de su elaboración matemática.

La puerta de ingreso a ese terreno de interacción es la noción de infinito. Cantor distingue entre infinito actual e infinito potencial, y dentro del infinito actual distingue entre: infinito en concreto, en abstracto y en Dios (o infinito absoluto). El primero remite a las cantidades infinitas, el segundo (in abstracto) se corresponde con los números transfinitos (en la teoría de conjuntos, número transfinito es el término original que Cantor introdujo para referirse a los ordinales infinitos, que son mayores que cualquier número natural. Actualmente nos referimos a ordinales o cardinales, «transfinito» e «infinito» son sinónimos). Spinoza rechaza la existencia de números infinitos pero, paradójicamente, termina inspirando a su inventor.

El infinito "en abstracto", es el que nos va a interesar, puesto que veremos una propuesta de analogía entre ese y cierta forma de tratar el infinito en Spinoza (que no solamente aparece en La Ética, sino que hay una reconocida carta «Sobre el infinito» de Spinoza a Mayer[4]).

Pasemos entonces a ver en qué consiste este tratamiento del infinito sobre el que se monta la analogía. Spinoza distingue al menos tres tipos de infinito. El primer sentido de infinito es el que se dice de Dios. Repasemos la Definición 6: De Dios

«Por Dios entiendo un ser absolutamente infinito, esto es, una sustancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita.»

Agregamos la explicación de Spinoza:

«Digo 'absolutamente infinito' y no 'en su género'; pues de aquello que es meramente infinito en su género podemos negar infinitos atributos, mientras que a la esencia de lo que es absolutamente infinito pertenece todo cuanto expresa su esencia, y no implica negación alguna.»

Y veamos las definiciones involucradas:

Definición 3: De sustancia. Por sustancia entiendo aquello que es en sí y se concibe por sí, esto es, aquello cuyo concepto, para formarse, no precisa del concepto de otra cosa.

Definición. 4: De Atributo Por atributo entiendo aquello que el entendimiento percibe de una sustancia como constitutivo de la esencia de la misma.

Definición. 8: De Eternidad Por eternidad entiendo la existencia misma en cuanto se la concibe como siguiéndose necesariamente de la definición de una cosa eterna

Si alguien sigue leyendo para este momento, no se desanime. Vale la pena. Hagamos el esfuerzo de mezclar estas definiciones:

Dios -un ser absolutamente infinito- es una sustancia [algo que es en sí y se concibe por sí, su concepto para formarse no precisa del concepto de otra cosa] que consta de infinitos atributos [aquello que el entendimiento percibe de la sustancia como constitutivo de su esencia], cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita.

Hasta acá tenemos tres menciones del infinito en escena. Si resulta ahora incomprensible ¡mejor!, justamente por ello queremos traer, si es que no empeoramos las cosas, a la Teoría de Conjuntos. Pero para resumir: infinito que se dice Dios, infinito que se dice de los atributos (al decir que son infinitos), y cuando se dice de la esencia que esos atributos expresan.

Algunas observaciones en torno a esta primera parte. En el trayecto de la Ética, Spinoza probará a su manera que hay una única sustancia (Dios). Como los atributos se refieren, por definición, a la sustancia, los atributos finalmente son, necesariamente, atributos de Dios (por eso decimos "atributos de Dios"). A pesar de que Dios y la sustancia son una y la misma cosa, hay que recordar que sus definiciones son distintas (y por lo tanto no son exactamente la misma cosa). Notar que la idea de que Dios es un ser 'absolutamente infinito' puede (o no) ser integrada a la coincidencia terminológica con los infinitos de Cantor mencionada más arriba. En cuanto a la explicación sobre lo 'absolutamente infinito', podemos tomar otra definición de la Ética, para ir acostumbrándonos:

Definición. 2: Finita en su género. Se llama finita en su género aquella cosa que puede, ser limitada por otra de su misma naturaleza. Por ejemplo, se dice que es finito un cuerpo porque concebimos siempre otro mayor. De igual modo, un pensamiento es limitado por otro pensamiento. Pero un cuerpo no es limitado por un pensamiento, ni un pensamiento por un cuerpo.

¿No suena esta definición dentro de todo conocida para quienes hacemos matemáticas? Notar que en los ejemplos de cosas de la misma naturaleza, la comparación es del tipo cuerpos con cuerpos, pensamientos con pensamientos. Se trata de los atributos ¿Se acuerdan de por qué la partición era Spinozista, de quiénes habían motivado los famosos A_α?

Detengámonos un poco en los atributos. Si bien los atributos se definen como 'aquello que el entendimiento percibe de una sustancia como constitutivo de la esencia de la misma', lo que parece transformarlos en una suerte de construcción mental, otras utilizaciones del término sugieren que hay una complejidad mayor, en el sentido de que existen realmente. Sobre esto hay múltiples discusiones que nos exceden, así que haremos elecciones a veces arbitrarias. Por ejemplo, es posible que intercambiemos o igualemos "atributo" con "cualidad".

Es evidente que todavía faltan clarificar algunos enunciados, no hemos entrado suficientemente en calor. Pero hasta ahora parece que el infinito de Dios surge de la posesión simultánea de los dos infinitos que corresponden a los atributos: en cantidad, y en esencia. Agreguemos algunas proposiciones:

PROPOSICIÓN 2. Dos sustancias que tienen distintos atributos no tienen nada que ver una con la otra.

PROPOSICIÓN 5: En la naturaleza no puede haber dos o más sustancias que tengan el mismo atributo.

Son proposiciones que le servirán a Spinoza para demostrar la unicidad de la sustancia. Ya hemos hablado de que un atributo alcanza para determinar a una sustancia. Por eso, quizás caprichosamente, propondremos los atributos casi como cualidades o "propiedades definidoras" de la sustancia. La arquitectura de la que disponemos hasta ahora es: las sustancias, que Spinoza mostrará que no hay más que una, y que es Dios, los atributos, que son cualidades de la sustancia. Vamos a reconocer dos sentidos distintos para referirse a la manera en la que los atributos son infinitos. El primer sentido está ligado a la parte de la definición que afirma que cada uno de los atributos de Dios 'expresa una esencia eterna e infinita'. A este infinito lo llamaremos infinito en esencia. Como dice en [2]:

«The first sense (infinity in essence) might also be characterized as 'actually metrical' for the essence of the attributes is something more 'extended' than every single object included in it. This becomes more comprehensible when one recalls that, for Spinoza, every attribute expresses an infinite essence which is part of the infinite divine essence. On the one hand, this implies that every attribute is a part of God's attributes. On the other hand, this implies that God's attributes are not reducible to other attributes. Furthermore, God's attributes cannot be divided for a division of one of God's attributes would lead to a division of the substance, which is unthinkable in the context of Spinoza's metaphysics. Metaphorically speaking, an attribute of God is like an 'organism' which arises out of its 'parts' but is yet not reducible to its 'parts'»

«El primer sentido (infinito en esencia) puede ser caracterizado como 'actualmente métrico' puesto que la esencia de los atributos es algo más 'extenso' que cada uno de los objetos incluidos en ella. Esto se vuelve más comprensible cuando uno recuerda que para Spinoza, todo atributo expresa una esencia infinita que es parte de la esencia divina, también infinita. Por un lado, esto implica que cada atributo es parte de los atributos de Dios. Por el otro, que los atributos de Dios no son reducibles a otros atributos. Más aún, no pueden ser divididos puesto que una división en los atributos implicaría una división de la sustancia, cosa impensable en el contexto de la metafísica de Spinoza. Metafóricamente hablando, un atributo de Dios es como un 'organismo' que surge de sus partes, pero que no es reducible a ellas.»

Sobre la indivisibilidad, Deleuze dirá: «Los atributos son cualidades eternas e infinitas: es en este sentido que son indivisibles. La extensión es indivisible, en tanto cualidad sustancial o atributo. Cada atributo es indivisible en cuanto cualidad. Pero cada atributo -cualidad tiene una cantidad infinita que es divisible bajo ciertas condiciones. Esta cantidad infinita de un atributo forma una materia, pero una materia solamente modal. Un atributo se divide pues modalmente, no realmente. Tiene partes que se distinguen modalmente: partes modales, no sustanciales ni reales.»[5]

Es posible que para usted, como para nosotros, esto resulte complicado ¡Incluso mucho más complicado que entender la partición Spinozista!

De acuerdo con nuestra perspectiva, lo infinito no es el atributo sino la esencia que el atributo expresa. El problema de la expresión en Spinoza, el concepto de expresión, no es un problema menor. Por lo pronto podemos decir, al menos concedámoslo por el momento, que el atributo es infinito por lo que expresa, porque expresa algo infinito.

El segundo sentido se corresponde con la parte de la definición que afirma que Dios es una sustancia que 'consta de atributos infinitos'. Este sentido, al que llaman 'en cantidad', es el más sencillo, según los autores se trata simplemente de cada atributo contiene infinitas cosas dentro. Esas cosas que 'tiene dentro', como ya vimos, son los modos. Teniendo al menos una idea de qué son los atributos y de qué manera los vamos a considerar infinitos, antes de pasar a analizar la gema de esta sección, que son los modos, veamos por fin algunos ejemplos de atributos. Los atributos que conocemos son dos: la Extensión y el Pensamiento. Dentro del atributo Extensión están los cuerpos, dentro del Pensamiento las ideas. Ahora, las ideas particulares y los cuerpos son esas cosas "dentro de los atributos".

Recordemos la Definición 5: Por modo entiendo las afecciones de la sustancia, o sea, aquello que es en otro, por medio del cual también es concebido. Además, en el corolario a la proposición 25, Spinoza dirá:

COROLARIO DE LA PROPOSICIÓN 25: Las cosas particulares no son sino afecciones de los atributos de Dios, o sea, modos por los cuales los atributos de Dios se expresan de cierta y determinada manera.

Bien, ya estamos en condiciones de tomar otro sentido en el que Spinoza habla del infinito: el infinito dicho de los modos. Este infinito aparece en las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN 21: Todo lo que se sigue de la naturaleza, tomada en términos absolutos, de algún atributo de Dios, ha debido existir siempre y ser infinito, o sea, es eterno e infinito en virtud de ese atributo.

Según lo convenido hasta el momento, debe entenderse que un modo puede ser infinito si se sigue de un atributo totalmente expresado, si captura toda su expresión.

PROPOSICIÓN 22 Todo lo que se sigue a partir de un atributo de Dios, en cuanto afectado de una modificación tal que en virtud de dicho atributo existe necesariamente y es infinita, debe también existir necesariamente y ser infinito.

PROPOSICIÓN 23 Todo modo que existe necesariamente y es infinito, ha debido seguirse necesariamente, o bien de la naturaleza de algún atributo de Dios considerada en absoluto, o bien a partir de algún atributo afectado de una modificación que existe necesariamente y es infinita.

Para este punto la complejidad de la lectura debería ser abundante. Lo que esperamos es que pueda retenerse la siguiente idea. Las cosas, contando entre las cosas las ideas, los cuerpos, pero también cosas como 'el resposo', no son sustancias, no son atributos, sino que son, para Spinoza, modos. Modos de ciertos atributos. Los atributos que conocemos son la Extensión y el Pensamiento, pero hay otros. Algunos modos pueden ser infinitos -un cuerpo, por ejemplo el suyo, es un modo finito, no infinito-, y otros pueden ser infinitos. Y la forma en que los modos son infinitos se "hereda" de los atributos, de dos maneras, una directa (o inmediata) que es la que se expresa en la proposición 21 (en la cual 'lo que se sigue en términos absolutos' es decir una afección directa) y otra indirecta (o mediata, que es la que aparece en la proposición 22, donde ahora se sigue de un atributo *pero ya modificado*). La proposición 23 lo explica: todo modo infinito se corresponde con uno u otro caso, y esto da lugar a dos tipos de modo. El modo de primer tipo, será la "materialización" (palabra nuestra y excesiva) de un atributo expresado en su totalidad, al que puede hacérsele algún tipo de modificación para dar lugar a un modo de segundo tipo. Quedémonos con esta idea: "modificación del atributo".

Tomando por ejemplo la Extensión tenemos luego modos infinitos de ese atributo, primero modo inmediatos: movimiento y reposo, y modos de segundo tipo o mediatos para los cuales Spinoza pone como ejemplo 'el aspecto del Universo', que vamos a tomar como una determinada disposición específica de las cosas. Finalmente tenemos los modos finitos, que son, por ejemplo, los cuerpos determinados. Algo parecido puede hacerse con el atributo Pensamiento, en el que un modo finito es por ejemplo cierta idea específica.

Resumamos lo que tenemos hasta el momento: Dios es absolutamente infinito puesto que posee todos los atributos completamente expresados, los atributos son infinitos en cantidad y en esencia pero no son absolutamente infinitos puesto que de un atributo puede negarse otro. Y los modos son infinitos si son la expresión de la naturaleza absoluta de un atributo, o bien una modificación de una expresión de ese tipo. Los atributos son una suerte de propiedad de la esencia de la sustancia que en Dios están máximamente expresados.

Deleuze dirá: «Es el modo existente el que tiene una infinidad de partes (un número muy grande); es su esencia o grado de potencia el que forma siempre un límite (un máximo y un mínimo); es el conjunto de los modos existentes, no solamente simultáneos sino sucesivos, el que constituye el infinito más grande, que es él mismo divisible en infinitos más o menos grandes»

¿No hay en esa elevación de infinitos algún sabor conocido?

3.2. De vuelta a la matemática: La famosa analogía

Ahora que hemos dispuesto esta arquitectura, a modo de descuidad resumen, podemos traer a la Teoría de Conjuntos a jugar su parte. Para esta altura ya tenemos una noción de qué son los ordinales y los cardinales. Vamos a flexibilizarla un poco, tratando de volver a un terreno más "primitivo", aunque la idea es precisamente poder trabajar con lo más actual de la matemática.

Para hacer la analogía, hay que retener exclusivamente dos propiedades de los números transfinitos[2]:

A) Cada uno es más grande que cualquier número finito
B) Cada uno puede ser representado por el conjunto de sus infinitos predecesores (ordinales, como recordarán del capítulo 2).

A esta altura esto debería resultarnos especialmente familiar. Estas propiedades se interpretan de manera Spinozista así:

Los números finitos son interpretados como modos finitos, y luego:
A') Todo número transfinito representa un infinito métrico

B') Todo número transfinito representa un infinito cuantitativo.

Bien, tratemos de expresar de manera clara cuál es la analogía. Los modos infinitos de primer tipo de Spinoza (es decir aquellas instancias "directas" de los atributos) se toman como los cardinales de Cantor, y los modos infinitos de segundo tipo (es decir, aquellos que surgen como afectación vía una modificación de los de primer tipo), se toman como los ordinales. Esta analogía está "inspirada" en las propias cartas de Cantor y el uso de terminologías comunes pero, a partir de esa inspiración, motivada en un aparente comportamiento similar entre los modos de Spinoza y los números transfinitos. Este 'comportamiento similar' es perfectamente comprensible. Pensemos en nuestra definición de cardinales: Un *cardinal* es un ordinal que no es biyectivo con ningún ordinal menor. El modo de primer tipo es tomado como una afección de un atributo, y el de segundo tipo como una modificación del modo de primer tipo. Esta modificación parece poder ser leída en clave de algo que ya hemos visto: el tipo de orden ¡Precisamente esto es lo que Cantor observó! En una de sus cartas dice:

«Un punto especialmente dificil en el sistema de Spinoza es la relación del modo finito con el infinito. Permanece sin explicar cómo y en qué circunstancias lo finito puede mantener su independencia con respecto a lo infinito, o lo infinito con infinitos incluso más grandes. Si ω es el primer número de la segunda clase de números, entonces $1+\omega=\omega$, pero $\omega+1=(\omega+1)$, donde $(\omega+1)$ es un número enteramente distinto de ω. Por lo tanto, uno puede ver claramente que todo depende del lugar de lo finito en relación con lo infinito; si está antes entonces se une a lo infinito y se desvanece en él; pero si toma su lugar después, el infinito se preserva y se úne para formar un nuevo infinito *modificado*»[2]

Sobre la aritmética ordinal, puede consultarse en la sección 1.4 de [7].

3.3. Coordenadas de nuestra navegación

Hemos de notar que esta última parte sólo expone algunas líneas de investigación, aunque apenas brevemente y sin exponer resultados. Es apenas un vistazo del umbral. En esta investigación nos encontramos, puesto que esta monografía la realizamos en el marco de una beca de investigación. Precisamente pasamos el primer artículo y ahora nos encontramos en la línea del segundo.

Para esta monografía, con el primer artículo mostramos un campo de estudio exclusivamente matemático proveniente de una inspiración filosófica. Con la siguiente sección, pretendemos mostrar de manera explícita un trabajo de investigación en el terreno mixto de filosofía y matemática, incluso en procura de un campo matemático como el anterior, vale decir, también en busca de una inspiración. A esto le llamamos una rara matemática aplicada.

Nuestra línea consiste en tratar de reconvertir la analogía propuesta en [2] a una noción más actual de ordinales y cardinales, sin atender tanto a la posible inspiración cantoriana. En este sentido, poder darle lugar en primera instancia al concepto de conjunto en el marco de la filosofía de Spinoza, paso que, contrariamente al asumido por los autores, nos parece previo.

Por ejemplo, cabe notar que el argumento por el que se analoga a los modos de primer tipo con los cardinales es probable que baste para ordinales límite (como los que vimos en la introducción).

Además, si se ha leído con atención, varios asuntos deberían encender las alarmas. En primer lugar, estamos trabajando el concepto de cardinales y ordinales en los modos, mientras que antes partimos de unos ciertos conjuntos ¿Qué rol juegan los conjuntos en todo esto? El problema principal, observado en [2], es que como los modos se siguen de los atributos, estos últimos no pueden ser tomados como conjuntos. Esto sencillamente por algo que ya hemos visto. Los atributos son máximos en su género, pero como sabemos no existe el conjunto que contiene a todos los ordinales.

Teorema 5 (Burali-Forti)**.** *Ord* no es un conjunto.

Demostración. Si *Ord* fuera un conjunto entonces sería un ordinal pero por la definición de *Ord* tendríamos que $Ord \in Ord$, lo cual es absurdo. □

¿Cómo concebir la maximalidad de los atributos si son cosiderados como conjuntos? Su infinito es un infinito que no puede ser aumentado. Lo curioso es que el mismo Cantor menciona que las series infinitas de números cardinales representan un "signo de lo Absoluto".

Y aquí surge algo muy interesante. Cuando se lleva la analogía matemática adelante, y se ven sus fallas, pueden intentar corregirse procurando la mayor coincidencia con la proveniencia filosófica, o llevarse adelante independientemente de ella y, en todo caso, ver si un nuevo traspaso al terreno filosófico nos permite discutir, en este caso, con el mismo Spinoza.

Para que se entienda: de acuerdo a cómo se prosiga el trabajo puede elaborarse la idea de un "tercer tipo de modo", o de un "atributo de segundo tipo". Es cierto que Spinoza no habla de eso, pero ese no es el asunto. De la misma manera que la partición Spinozista de Friedman es interesante como resultado matemático, más allá de que no sea completamente transportable a la filosofía de Spinoza.

Capítulo 4

Algunos comentarios en torno al título y a la actualidad del tema

Las nociones de Spinoza aquí presentadas deben ser tomadas en un sentido ingenuo, lúdico, incluso casi ahistórico. Seguramente cualquiera con experticia en la filosofía de Spinoza pueda horrorizarse un poco con algunas asunciones y algunos usos forzados. Si a cambio encuentra algún interés en lo que la matemática puede ofrecerle, habrá valido la pena.

Con lo cual, lo anterior debe tomarse casi como la totalidad de lo disponible (es decir, sin preocuparnos por rastrear la elaboración de conceptos, los préstamos, la herencias, etc.) casi como si encontráramos la bibliografía en un pequeño barco flotante que llega a la isla en la que estamos atrapados, y debemos apañárnosla con lo que ya sabemos para poder seguir adelante.

Al mismo tiempo, si alguien de matemáticas encuentra en estas notas algo interesante, o algo sorprendente, también habrá valido la pena. Este es un terreno que nos parece fértil, agradable, disponible, raro. Hemos conocido matemáticos que han ido a parar a facultades de filosofía. Nosotros mismos, de repente, elaboramos esta monografía.

Para hacer hincapié en la actualidad del tema: el título del trabajo fue tomado del nombre del XVII Coloquio Internacional de Spinoza, organizado por el Centro Latinoamericano de Estudios Spinozistas, que se realizará en Diciembre de este año. Esta vez el coloquio lleva el nombre de 'Spinoza en las orillas'. Para este coloquio, hemos preparado un abstract que enviaremos: con muchísima suerte podríamos acercar nuestra pequeña embarcación matemática hasta esas orillas también.

Capítulo 5

Agradecimientos

Al gran Ramiro Ríos, que otra vez tomó a su cargo la elaboración de una carátula por el módico precio de un vino y un elogio.

A Pedro Sánchez Terraf que nos compartió sus notas incluso a riesgo de dejar sin saberlo su nombre capturado en los agradecimientos de una monografía capaz de escandalizarlo.

A Camper que, además de sus notas nos gratificó con una honda paciencia.

A Spinoza, por dejarnos malversar los fondos de la Ética, que afortunadamente son inagotables, como el infinito.

A los Spinozistas del Centro de Estudios, de quienes tomamos prestado un título que esperamos poder devolver intacto en diciembre.

Bibliografía

[1] Spinoza, B. (2013). Ética demostrada según el orden geométrico. Madrid: Alianza

[2] Bussotti P. y Tapp C. (2008). The influence of Spinoza's concept of infinity on Cantor's set theory. Elsevier Science.

[3] Friedman J. (1974). Some Set-Theoretical Partition Theorems Suggest by the Structure of Spinoza's God, in Synthese, 27-1, p. 199-209

[4] Spinoza, B. (1988). Correspondencia. Madrid: Alianza.

[5] Deleuze, G. (2003). En medio de Spinoza. Buenos Aires: Cactus.

[6] Sierra M. P. (2017). A formalization of Spinoza's Ethics, Part 1: Consequences for interpretation. (Tesis de maestria). Universiteit van Amsterdam, Amsterdam

[7] Terraf, S. P. (2022). Conjunteoría `https://cs.famaf.unc.edu.ar/~pedro/conjunteoria/apunte_st.pdf`

[8] Campercholi, M. Apunte de Introducción a la Teoría de Conjuntos.