

---

---

ESCUCHÁ LO  
QUE DICE TU  
GEOMETRÍA

---

---

UN ACERCAMIENTO A LA GEOMETRÍA ESPECTRAL INVERSA

AARON GELVES

*Departamento de Física  
Universidad Nacional del Sur  
Bahía Blanca*

CONCURSO DE MONOGRAFÍAS UMA

2022

*Dios es como el hábil geómetra que, pudiendo describir una línea recta con suma facilidad y un solo trazo de su compás, prefiere hacerlo de manera más larga o circular.*

– *Sir Thomas Browne*<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>T. Browne, *Religio Medici*, primera parte, sección 16 (1642). Thomas Browne (1605-1682) fue un médico y escritor inglés admirado por Jorge Luis Borges.

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. El operador de Laplace y la ecuación de onda</b>	<b>6</b>
1.1. Espacios y vectores . . . . .	6
1.2. Operadores . . . . .	7
1.3. Problemas de autovalores y autofunciones . . . . .	7
1.4. Ecuación de onda . . . . .	8
1.4.1. Operador de Laplace . . . . .	9
1.4.2. Guitarras y la ecuación de la cuerda . . . . .	9
1.4.3. Tambores y la ecuación de la membrana . . . . .	12
<b>2. El problema espectral inverso de la cuerda</b>	<b>14</b>
<b>3. El problema espectral inverso de la membrana</b>	<b>16</b>
3.1. Planteo . . . . .	16
3.2. Solución . . . . .	16
3.3. Invariantes espectrales . . . . .	17
3.3.1. El área . . . . .	17
3.3.2. El perímetro . . . . .	18

3.3.3. Otros invariantes . . . . .	20
<b>4. El problema espectral inverso desde la física</b>	<b>21</b>
4.1. Excitación de la membrana . . . . .	21
4.2. Membranas homofónicas . . . . .	23
4.3. Carga del aire . . . . .	26
<b>5. “¿Y esto me sirve para algo?”</b>	<b>28</b>
5.1. Mantenimiento de campanas . . . . .	28
5.2. Transferencia de estilos . . . . .	29
5.3. Reconstrucción de estructuras . . . . .	30
5.4. Exploración de formas . . . . .	33
<b>Conclusión</b>	<b>34</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>36</b>

# Introducción

En 1966 el matemático **Mark Kac**<sup>2</sup> publicó en el *American Mathematical Monthly* un artículo con el llamativo título “**Can One Hear the Shape of a Drum?**” (“¿Puede Uno Escuchar la Forma del Parche de un Tambor?”). Esta pregunta, que en un principio puede sonar bastante rara, no es más que una formulación didáctica de un problema matemático fascinante.

Dicho de manera formal y en el lenguaje debido, la pregunta recién mencionada se podría plantear del siguiente modo: “Dado un **problema de Dirichlet** para el **operador de Laplace**, ¿es posible encontrar dos **dominios** tales que los **autovalores** sean los mismos para ambos dominios?”, o “Dado el conjunto de autovalores de un determinado problema de autofunciones, ¿es posible reconstruir el dominio de dicho problema?”.

En su artículo, Kac no supo responder de manera exacta, pero sí respondió otras preguntas relacionadas. Hubo que esperar hasta 1992 para la respuesta definitiva, la cual fue dada por Carolyn Gordon, David Webb y Scott Wolpert<sup>3</sup>.

Pero ahí no terminó todo, pues la pregunta hecha por Kac puede generalizarse a otros tipos de problemas o de ecuaciones que no necesariamente están relacionados al operador de Laplace o a las condiciones de Dirichlet. Así, el área de la matemática que estudia las relaciones entre estructuras geométricas y espectros de operadores diferenciales se llama **geometría espectral**, y cuando se particulariza a la obtención de información geométrica a partir de información espectral (como el problema que hemos mencionado) se denomina **geometría espectral inversa**.

El objetivo de la presente monografía es explicar el problema planteado por Kac y su solución, así como también las consecuencias que esta implica. En estos últimos párrafos hemos hablado del problema en términos altamente matemáticos

---

<sup>2</sup>Mark Kac (1914-1984) fue un matemático polaco, ganador de los premios Chauvenet y Birkhoff, que realizó aportes a la teoría de números, probabilidad, y geometría.

<sup>3</sup>Carolyn Gordon, David Webb y Scott Wolpert son matemáticos estadounidenses reconocidos principalmente por haber resuelto el problema de Kac.

que pueden sonar intimidantes, pero nuestro fin es también explicarlo de forma que cualquier persona interesada, sea un especialista, un estudiante o una persona con instrucción básica en matemática y física, pueda entenderlo y disponer así de las herramientas necesarias para profundizar en la geometría espectral inversa y disfrutar de la belleza e importancia que entraña.

La estructura de la monografía será la siguiente: en el Capítulo 1 se presentarán las nociones básicas para llegar a la ecuación de onda, analizándola para el caso de una cuerda y para el de una membrana; en el Capítulo 2 explicaremos el problema inverso del espectro para el caso de la cuerda; en el Capítulo 3 hablaremos del problema de Kac, su solución y algunos resultados relacionados; en el Capítulo 4 analizaremos los resultados matemáticos del Capítulo 3 desde un enfoque físico; y, finalmente, en el Capítulo 5 presentaremos algunas de las aplicaciones y utilidades de lo visto en los capítulos previos.

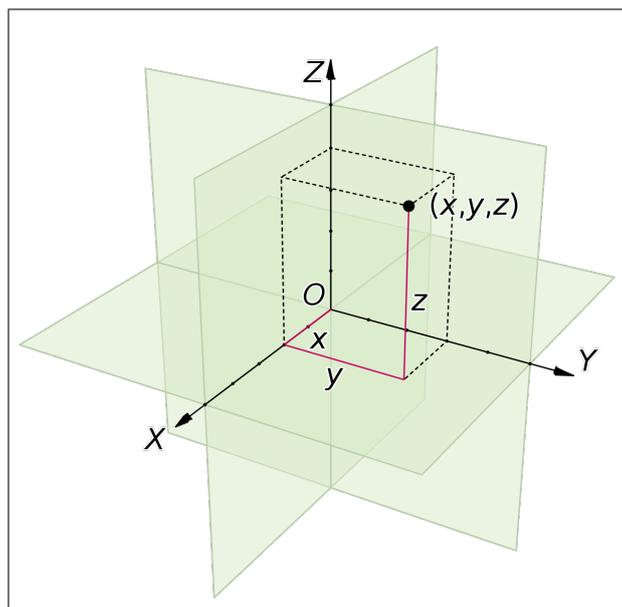
En las últimas páginas el lector podrá encontrar la bibliografía utilizada en la escritura de esta monografía para seguir adentrándose en el tema.

# 1. El operador de Laplace y la ecuación de onda

Para poder entender el problema espectral inverso debemos entender qué es un operador, y para esto, a su vez, debemos tener una noción de qué es un espacio.

## 1.1. Espacios y vectores

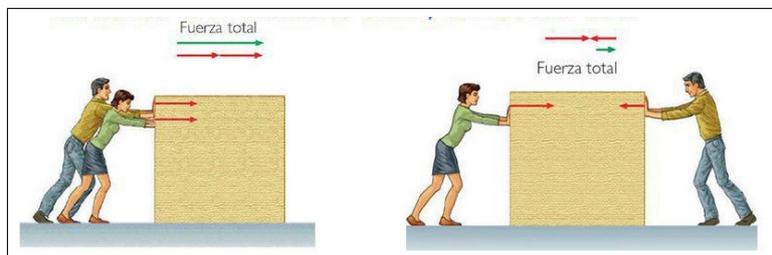
Llamamos **espacio** a un conjunto de **objetos matemáticos** con determinadas **relaciones** definidas entre ellos. Para un ejemplo basta con pensar en el espacio por el cual nos trasladamos, que es conocido como espacio euclídeo (ver Figura 1). En este espacio sabemos que dados dos puntos, que son objetos matemáticos, podemos trazar una única recta que los une, lo cual es una relación entre tales objetos.



**Figura 1:** Espacio euclídeo, por el cual nos movemos.

Ahora supongamos que los elementos del espacio pueden ser sumados entre sí, estirados o acortados. En este caso decimos que se trata de un **espacio vectorial**. Así sabemos que si una persona hace una fuerza de 10 N sobre una caja y otra

persona también hace 10 N, la fuerza total será  $10\text{ N} + 10\text{ N} = 20\text{ N}$ , o lo que es lo mismo,  $2 \times 10\text{ N} = 20\text{ N}$ , como se ve en la Figura 2. Esto se puede hacer porque la fuerza es un **vector** (un elemento de un espacio vectorial).



**Figura 2:** Suma y resta de fuerzas.

## 1.2. Operadores

Definimos como **operador** a una **función** que actúa sobre los elementos de un espacio y los convierte en elementos de otro espacio. Cuando un operador es tal que actúa sobre un espacio vectorial y preserva algunas propiedades (como la continuidad) se dice que es de tipo **lineal**.

Dentro de estos operadores lineales están los **operadores diferenciales**, los cuales toman una función y devuelven otra que da información sobre cómo varía dicha función cuando cambia el argumento que la define. Este es el caso del operador  $D = \frac{d}{dt}$ , en donde  $t$  es el tiempo. Si este operador se aplica a la posición  $x(t)$  de un auto, se obtiene la velocidad  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ , que indica qué tan rápido cambia la posición cuando el tiempo avanza.

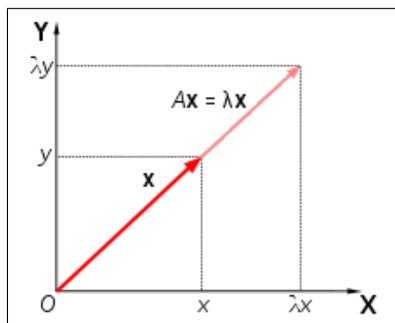
## 1.3. Problemas de autovalores y autofunciones

Consideremos ahora un operador diferencial  $D$  que se aplica sobre una función  $f$ . En general, el resultado de esta operación llevará a una nueva función que no tendrá relación con  $f$ . Sin embargo, para algunos operadores existirán funciones

tales que al aplicarles  $D$  la nueva función será un múltiplo de tales funciones, es decir:

$$Df = \lambda f \quad (1)$$

en donde  $\lambda$  es un número (ver Figura 3). A las funciones que cumplen con esta condición se las denomina **autofunciones** del operador  $D$ , y a los números  $\lambda$  se los denomina **autovalores** del operador  $D$  asociado a  $f$ . Al conjunto de los autovalores se le dice **espectro** y a la búsqueda de las autofunciones de un operador se le denomina **problema de autovalores y autofunciones**.



**Figura 3:** Dado un vector  $x$ , la transformación  $A$  alarga a  $x$  en un factor de  $\lambda$  pero mantiene su dirección original. Decimos que  $x$  es un autovector de  $A$  con autovalor asociado  $\lambda$ .

#### 1.4. Ecuación de onda

La ecuación de onda y su solución son una forma simple de llegar a comprender la esencia de la geometría espectral inversa gracias no solo a su fácil resolución, sino también a su didacticismo, pues sus consecuencias están presentes en los instrumentos musicales. A continuación hablaremos de ella.

### 1.4.1. Operador de Laplace

Uno de los operadores más importantes en cuanto a sus aplicaciones y fundamental en el problema de Kac y otros es el **operador de Laplace**<sup>4</sup> o **laplaciano**, que se denota por  $\Delta$  o  $\nabla^2$ .

El operador de Laplace es de tipo diferencial y, para un sistema de ejes cartesianos  $x$ ,  $y$  y  $z$  (como el de la Figura 1) se define como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

pero puede ser generalizado a más (o menos) dimensiones y otras coordenadas<sup>5</sup>.

### 1.4.2. Guitarras y la ecuación de la cuerda

Pensemos en una guitarra. Vemos que es una caja en forma de ocho que tiene adherido un mástil largo con trastes y seis cuerdas. Cuando el guitarrista toca no hace más que someter las cuerdas a unas determinadas condiciones sobre el desplazamiento que estas realizan o sobre la velocidad que llevan, y, consecuentemente, el movimiento evoluciona. Usando consideraciones físicas (tener en mente la Figura 4) se llega a que la ecuación que describe el desplazamiento vertical  $\Psi(x; t)$  de la cuerda es<sup>6</sup>:

$$c^2 \frac{\partial^2 \Psi(x; t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x; t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

Esta ecuación se denomina **ecuación de onda** unidimensional (la cuerda so-

---

<sup>4</sup>Pierre-Simon Laplace (1749-1827) fue un matemático y físico francés, que, entre muchas otras contribuciones, aplicó el operador que lleva su nombre al estudio de los cuerpos celestes.

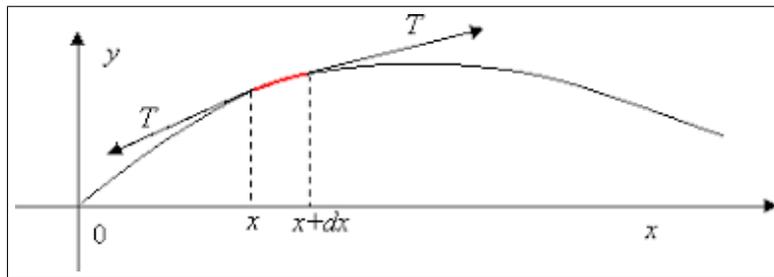
<sup>5</sup>En Referencia [7] se muestra la expresión del laplaciano en las coordenadas conocidas como cilíndricas y esféricas.

<sup>6</sup>Para una explicación detallada de cómo llegar a la Ecuación 3 ver Referencia [6].

lamente puede moverse en vertical). Decimos que  $c$  es la velocidad a la que se propagan las ondas en la cuerda, y para este caso se calcula como:

$$c^2 = \frac{T}{\mu} \quad (4)$$

en donde  $T$  es la tensión sobre la cuerda y  $\mu$  su densidad lineal, o sea, la masa por unidad de longitud.



**Figura 4:** Cuerda finita.

Para resolver esta **ecuación diferencial parcial**<sup>7</sup> se utiliza lo que se llama el **método de separación de variables**<sup>8</sup>, en donde se separan la **parte espacial del movimiento**,  $X(x)$ , y la **parte temporal**,  $T(t)$ . Luego de aplicar este método se llega a las siguientes **ecuaciones diferenciales ordinarias**:

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\frac{\omega^2}{c^2}X(x) \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}T(t) = -\omega^2T(t) \quad (6)$$

<sup>7</sup>Se llaman ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a aquellas ecuaciones en las que aparece el operador diferencial respecto a dos o más variables. En este caso, tenemos que las variables de los operadores son  $x$  y  $t$ . Cuando el operador diferencial aparece respecto a una única variable se habla de ecuaciones diferenciales ordinarias.

<sup>8</sup>Para más información sobre cómo resolver esta ecuación diferencial con separación de variables revisar la Referencia [7]

que no son más que dos problemas de autovalores y autovectores (Ecuación 1): uno del operador de Laplace unidimensional (primer término de la Ecuación 2) y otro del operador diferencial temporal aplicado dos veces. Para resolverlos debemos imponer las condiciones de extremos fijos, pues esto nos permite limitar las soluciones a aquellas que tienen sentido físico (ver Referencia [7]). Las soluciones de estos problemas son:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad (7)$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (8)$$

$$T_n(t) = B_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n^* \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad (9)$$

Con esto en cuenta, la solución general será:

$$\Psi(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n^* \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (10)$$

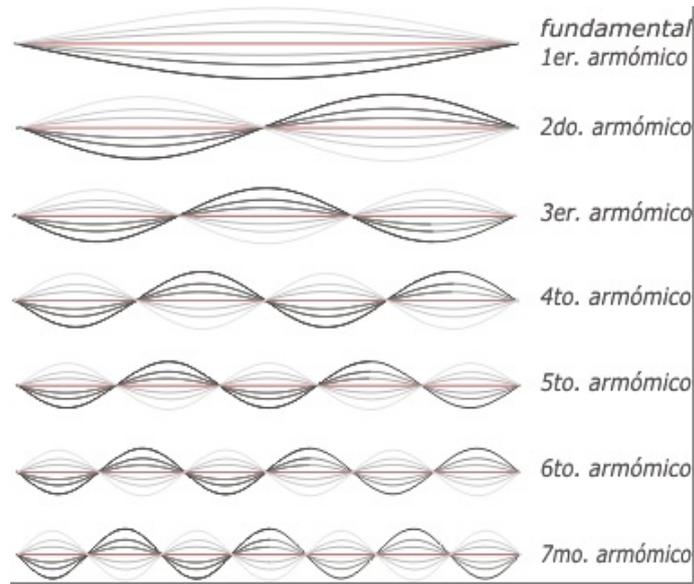
Vemos que la Ecuación 7 lleva a los autovalores del problema general y los productos  $X_n(x)T_n(t)$  son las autofunciones. El  $\Sigma$  delante en la Ecuación 10 indica una sumatoria, por lo que se aprecia que la solución general no es más que una combinación de las distintas autofunciones espaciales y temporales. En otras palabras, el movimiento de la cuerda podrá ser descompuesto<sup>9</sup> en los movimientos mostrados en la Figura 5.

Para obtener una solución particular debemos agregar dos condiciones temporales, pero esto no nos compete<sup>10</sup>.

---

<sup>9</sup>Cuando se tiene una señal temporal, por ejemplo una emitida por la cuerda, se pueden conocer los componentes oscilatorios de dicha señal haciendo uso de lo que se conoce como transformada de Fourier.

<sup>10</sup>Ver Referencia [7] para un ejemplo de cómo resolver el problema completo.



**Figura 5:** Autofunciones espaciales de la cuerda finita fija en sus extremos (Ecuación 8).

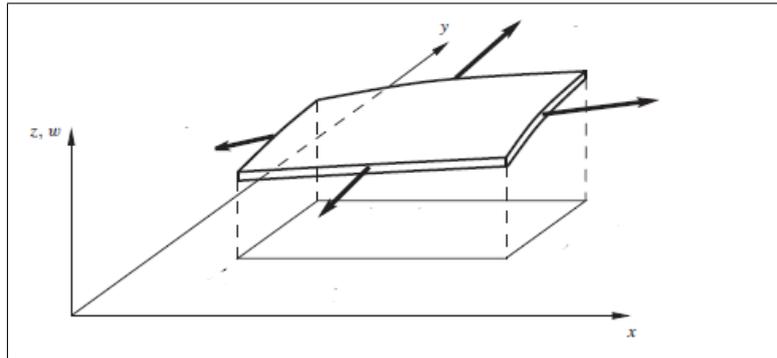
### 1.4.3. Tambores y la ecuación de la membrana

Acabamos de considerar el caso unidimensional, pero ¿qué pasa si añadimos una nueva dimensión? Pensemos en un tambor, como el que se ve en la Figura 6. El parche de este parece muy distinto a la cuerda de la guitarra, pero la idea subyacente al estudio del movimiento es bastante similar ya que la forma de llegar a la ecuación del desplazamiento se basa en las mismas consideraciones físicas<sup>11</sup>, pero al tener más dimensiones el operador de Laplace será ahora bidimensional (primeros dos términos de la Ecuación 2):

$$c^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (11)$$

---

<sup>11</sup>Ver Referencia [6].



**Figura 6:** Parche de un tambor.

Al aplicar separación de variables también se obtendrán diferentes problemas de autovalores y autofunciones, pero estas diferirán según el **dominio**, o sea, según la forma del parche.

El problema de autovalores del operador de Laplace es fácil de resolver para una membrana con dominio rectangular, circular, o alguna triangular. Sin embargo, para otros dominios se vuelve muy complicado.

## 2. El problema espectral inverso de la cuerda

Como dijimos en el capítulo anterior, en general, para obtener una **solución particular** de la ecuación de onda debemos proporcionar dos **condiciones de borde** por cada dimensión y dos de tiempo (una sobre la posición inicial y otra sobre la velocidad inicial). Para el caso de la cuerda de guitarra, las condiciones de borde son fáciles de ver: los extremos de la cuerda ( $x = 0$  y  $x = L$ ) se mantienen fijos para cualquier instante de tiempo. A estas condiciones sobre los bordes del dominio tratado se les llama **condiciones de Dirichlet**.

Al imponer estas condiciones sobre las soluciones obtenidas previamente llegamos a los autovalores haciendo uso de la Ecuación 7, que, viendo las unidades, vemos que son las frecuencias del sistema, por lo que también se les llama **autofrecuencias**. En física, a estas frecuencias se les llama **angulares**, pero cuando se las quiere medir se usan las frecuencias definidas como:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L} \quad (12)$$

Musicalmente, a estas frecuencias se les llama **armónicos de la cuerda**, y al primero de ellos (para  $n = 1$ ) se lo denomina **tono fundamental**. Cada una de estas frecuencias se asocia a una autofunción, a la que también se le llama **modo normal** o **modo de oscilación**.

Cuando el guitarrista toca una cuerda, el movimiento que esta desarrolle será una combinación de los distintos modos normales, como muestra la Ecuación 10. No obstante, los demás armónicos son múltiplos del tono fundamental, y por eso el sonido suena limpio y claro.

Poder encontrar los autovalores significa saber que el sistema está restringido a oscilar a determinadas frecuencias. Este último resultado es importantísimo para lo que veremos después, y, para entender por qué, proponemos el siguiente experimento mental.

Supongamos que en un laboratorio hay tres personas: un físico, un guitarrista y un músico. El guitarrista está encerrado en una habitación pequeña, de modo que los otros dos no pueden verlo pero sí escucharlo. El guitarrista procede a tocar una serie de notas en su guitarra y el músico es capaz de reconocer qué notas son gracias a su adiestrado oído musical. Así, el músico anota las notas (sol, re, do, etcétera) y se las pasa al físico. El físico conoce qué frecuencia se le asocia a cada una de ellas<sup>12</sup> y la velocidad a la que se propagan las ondas en la cuerda (usa la Ecuación 4), así que, haciendo uso de la Ecuación 7, despeja el valor de la longitud de la cuerda<sup>13</sup>. En otras palabras, el físico es capaz de “escuchar la forma” de una cuerda.

Esto que acabamos de presentar es la idea del problema planteado por Kac pero para el caso unidimensional, así que deberíamos responderle afirmativamente. En otras palabras, no podría darse que dos cuerdas del mismo material y densidad emitieran la misma frecuencia fundamental pero tuvieran distinta longitud.

---

<sup>12</sup>Aquí hemos asumido que las cuerdas de la guitarra oscilan solo en el modo fundamental ( $n = 1$ ). En la práctica se obtiene una combinación de los distintos modos armónicos, pero el que más contribuye al sonido producido es el fundamental.

<sup>13</sup>En realidad, es capaz de despejar la longitud efectiva de la cuerda, es decir la distancia entre el extremo fijo y el punto en donde se está presionando.

## 3. El problema espectral inverso de la membrana

### 3.1. Planteo

En la sección anterior pudimos resolver el problema de autovalores para una cuerda y a partir de ellos afirmamos que, conociendo la frecuencia a la que oscila la cuerda, podemos conocer su “forma” (su longitud), y así resolvimos el problema espectral inverso unidimensional.

No obstante, en el artículo original Kac se refirió a una membrana con los bordes fijos, así que ahora deberíamos proseguir de igual manera con este nuevo dominio: hallar las autofrecuencias e intentar realizar un experimento como el del capítulo anterior para obtener información geométrica a partir de ellas. Sin embargo, como dijimos en el Capítulo 1, resolver el problema de autovalores de una membrana puede complicarse, por lo que no podemos obrar igual que en el caso de la cuerda.

Esto no debería generarnos problemas, pues obtener el espectro de una membrana no era lo que pretendía Kac<sup>14</sup>; su pregunta era si, suponiendo conocido el espectro, podemos conocer la forma que tiene el tambor que lo produce.

### 3.2. Solución

Como dijimos en la introducción, Kac no supo dar una respuesta al problema, pero expresó su “intuición” de que no sería posible escuchar la forma del tambor.

En 1991, Gordon, Webb y Wolpert encontraron<sup>15</sup> una serie de membranas con

---

<sup>14</sup>Cuando la geometría se vuelve complicada y es necesario conocer el espectro de un dominio y operador se puede aproximar por métodos numéricos o análisis de Fourier, por ejemplo.

<sup>15</sup>Para construir dominios iso espectrales utilizaron el método de Sunada, el cual se basa en el modelo geométrico de la teoría de números propuesto por el matemático japonés Toshikazu Sunada.

formas diferentes pero áreas y perímetros iguales, que tenían el mismo espectro, dando una respuesta sólida a la pregunta de Kac: no, en general no es posible plantear un experimento como el del Capítulo 2 para determinar la forma de un tambor a partir de su espectro de frecuencias.

No obstante, en el artículo de Gordon y Webb, ellos dicen que los tambores isoespectrales de diferentes formas son excepciones. Es decir, en la práctica es posible escuchar la forma de un tambor a menos de que haya sido construido especialmente para ser isoespectral a otro.

Ahora bien, si bien en general no es posible conocer la forma de un tambor a partir de su espectro, sí es posible conocer muchas otras propiedades muy interesantes relacionadas a la geometría de la membrana. A estas propiedades se les llama **invariantes espectrales** y de ellas hablaremos en la siguiente sección.

### 3.3. Invariantes espectrales

#### 3.3.1. El área

Volvamos por un segundo al caso de la cuerda. Al suponer una cuerda de largo  $\pi$ , los autovalores que surgen de las Ecuaciones 5 y 7 son  $\{-1, -4, -9, \dots\}$ . Por otro lado, para una cuerda de largo  $2\pi$ , los autovalores son  $\{-1/4, -1, -9/4, -4, \dots\}$ . De estos espectros podemos concluir que mientras más larga es la cuerda, más “apretaditos” están los autovalores, o, lo que es lo mismo, para cualquier valor  $-R$  (con  $R > 0$ ), la cuerda de longitud  $2\pi$  tiene más autovalores cercanos a 0 que a  $-R$  en comparación con la cuerda de longitud  $\pi$ .

Así, por ejemplo, para los espectros dados, si tomamos  $R = 5$ , en el espectro de la cuerda corta hay menos valores cercanos a 0 (en este caso  $-1$  y  $-4$ ) que para la cuerda larga  $\{-1/4; -1; -9/4; \text{ y } -4\}$ .

Ahora hacemos lo mismo para el caso de un tambor, suponiendo que su espectro es conocido y es  $\{-1, -4, -9, -16, \dots\}$ . Llamamos  $N(R)$  a la cantidad de

autovalores más cercanos a 0 que a  $-R$ . De este modo, si  $R = 10$ , por ejemplo, entonces  $N(10) = 3$ .

Es fácil suponer que si  $R$  es más grande,  $N(R)$  también lo será. Es más, Hermann Weyl<sup>16</sup> probó en 1911 que, para el tambor,  $N(R)$  crece linealmente con  $R$ . La pendiente  $m$  de esta relación lineal, que indica qué tanto varía  $N(R)$  con  $R$ , puede calcularse como:

$$m = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R} \quad (13)$$

que es equivalente a decir “fíjate qué tan grande es  $N(R)$  respecto de  $R$  para  $R$  muy grande”. No solo eso, sino que Weyl probó que la pendiente está asociada con el área  $A$  de la siguiente forma:

$$A = 4\pi m \quad (14)$$

Esto no es otra cosa que afirmar que sí se puede escuchar el área del tambor, si consideramos dos dimensiones, pero también podría escucharse su volumen (si fuera un dominio tridimensional) o su longitud (si fuera un dominio unidimensional).

### 3.3.2. El perímetro

Siguiendo con lo expuesto en la sección anterior, una forma de conocer qué tan buena es nuestra aproximación de las Ecuaciones 13 y 14 es calcular  $N(R) - \frac{A}{4\pi}R$ , pues mientras más cercana a cero sea, más iguales serán ambos términos. Víctor Ivrii<sup>17</sup> demostró en 1980 que:

---

<sup>16</sup>Herman Weyl (1885-1955) fue un matemático alemán, que también hizo aportes a la física y a la filosofía de la matemática.

<sup>17</sup>Víctor Ivrii (n. 1949) es un matemático ruso, especializado en teoría espectral y ecuaciones diferenciales.

$$N(R) - \frac{A}{4\pi}R \approx \frac{P}{4\pi}\sqrt{R} \quad (15)$$

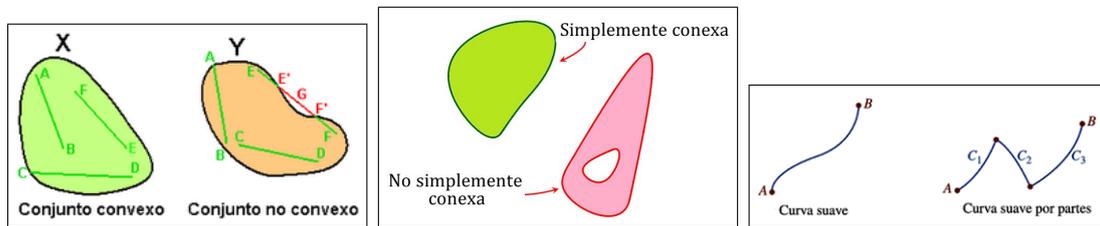
siendo  $P$  el perímetro. De esto obtenemos:

$$P = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi N(R) - AR}{\sqrt{R}} \quad (16)$$

Acá tenemos otro resultado: ¡es posible escuchar el perímetro del tambor!

Por ejemplo, una hoja de papel y un avioncito hecho con esa hoja de papel tendrían los mismos autovalores si el segundo fuera construido isométricamente a partir del primero (con rotaciones, traslaciones, reflexiones y dilataciones).

Tanto el área como el perímetro son muy importantes, pues si el tambor es rectangular bastaría para “escuchar” su forma, pero no es suficiente para otros dominios. Steven Zelditch<sup>18</sup> demostró que si el parche del tambor es **convexo**<sup>19</sup>, **simplemente conexo**<sup>20</sup>, tiene **bordes suaves**<sup>21</sup> y **simetría** es posible escuchar la forma, y este es el caso de los discos y las esferas.



**Figura 7:** Distintos tipos de curvas.

<sup>18</sup>Steven Zelditch (n. 1953) es un matemático estadounidense especializado en geometría compleja y física matemática.

<sup>19</sup>Un conjunto es convexo si para cada par de puntos de este, el segmento que los une está completamente contenido en el conjunto. Ver Figura 7.

<sup>20</sup>Un conjunto es simplemente conexo si no tiene agujeros. Ver Figura 7.

<sup>21</sup>Se dice que un borde es suave si se le puede apoyar una recta o un plano tangente en todos sus puntos y estos varían sin dar saltos. Ver Figura 7.

### 3.3.3. Otros invariantes

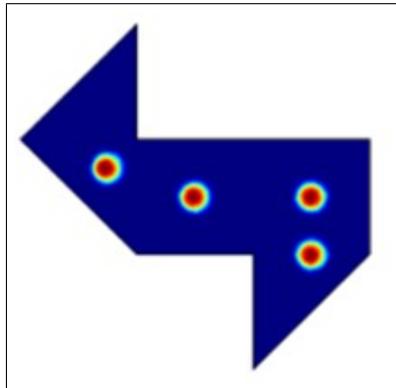
En 1967, McKean y Singer demostraron lo que Kac había conjeturado: es posible escuchar los agujeros y la curvatura que tiene el parche del tambor. En 2013, Paolo Amore demostró que no es posible escuchar su densidad. Además, fue demostrado que el sonido producido por una membrana con una esquina puntiaguda va a ser distinto del que produzca una membrana sin bordes o de bordes suaves, por lo que las esquinas también se pueden escuchar.

## 4. El problema espectral inverso desde la física

Ya hemos hablado sobre la solución al problema de Kac desde la matemática, pero no hemos dicho nada sobre la solución desde un punto de vista físico. Uno podría pensar que, en realidad, sí hemos hecho uso de la física, pues las ecuaciones de onda 3 y 11 fueron obtenidas teniendo en cuenta las ecuaciones de movimiento de Newton. Sin embargo, estas fueron consideraciones relacionadas a la dinámica de la cuerda o de la membrana, pero el problema que planteamos en un principio hablaba de “escuchar”, es decir, hacía referencia a la acústica o física ondulatoria del sonido, y de esto no hemos dicho nada hasta ahora.

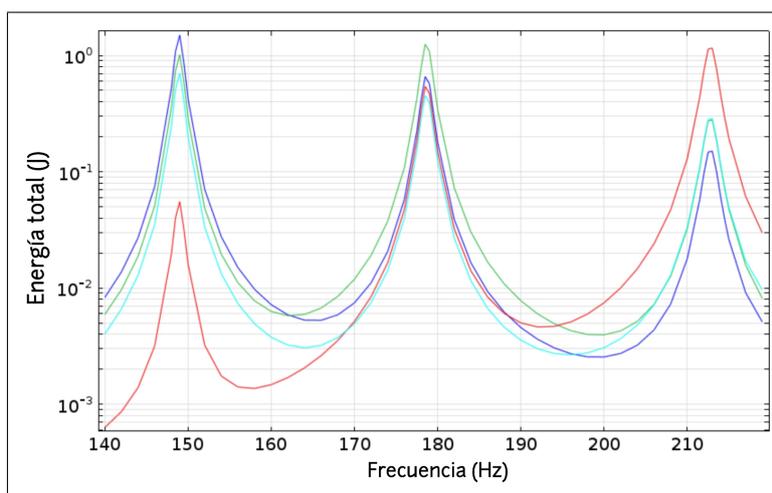
### 4.1. Excitación de la membrana

Consideremos un tambor como los propuestos por Gordon y Webb, y marquemos en él distintos puntos (Figura 8).



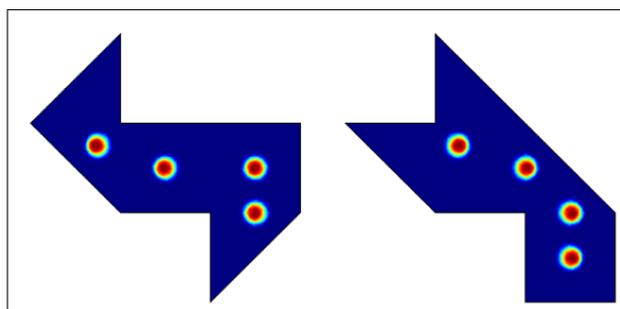
**Figura 8:** Tambor de Gordon-Webb con zonas a golpear.

Si una persona le da un golpe al parche del tambor en alguno de estos puntos, la respuesta y oscilación del sistema no serán las mismas que las resultantes en caso de haber golpeado otro de los puntos marcados, lo que significa que las frecuencias y el sonido tampoco lo serán (Figura 9). Así es que ni siquiera teniendo dos tambores idénticos sus espectros serían iguales, a menos de que se golpease un mismo punto.



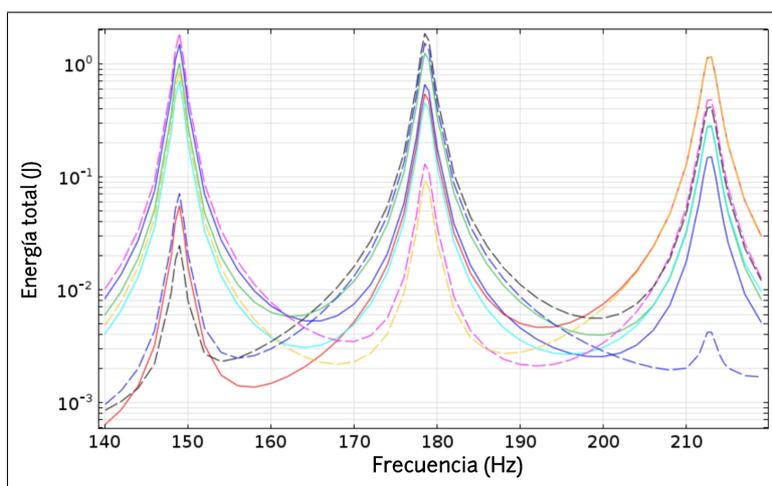
**Figura 9:** Espectro de energía emitido a distintas frecuencias al golpear los diferentes puntos mostrados en la Figura 8. Cada color representa uno de los puntos.

Ahora consideramos un tambor isoespectral al de la Figura 8:



**Figura 10:** Tambor de la Figura 8 (lo llamamos tambor 1) y otro isoespectral a este (llamado tambor 2).

Si sobre el gráfico de la Figura 9 graficamos las respuestas del nuevo tambor cuando es golpeado en las zonas marcadas obtenemos el gráfico de la Figura 11, en el cual vemos que dos tambores isoespectrales tampoco producen el mismo sonido, o sea, sí se pueden distinguir.



**Figura 11:** Espectro de energía emitido a distintas frecuencias al golpear los diferentes puntos mostrados en la Figura 10. Las líneas sólidas corresponden al tambor 1 y las segmentadas al tambor 2.

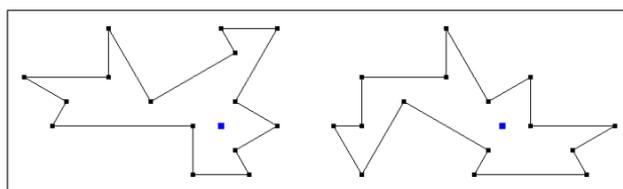
## 4.2. Membranas homofónicas

Hemos visto que dos dominios isoespectrales pueden sonar distinto, así que ahora nos preguntamos: ¿es posible encontrar dos tambores que no solamente tengan el mismo espectro de frecuencias sino que también suenen igual?

Peter Buser<sup>22</sup>, John Conway<sup>23</sup>, Peter Doyle y Klaus-Dieter Semmler construyeron dominios que responden afirmativamente a la pregunta recién formulada. Estos dominios se llaman **homofónicos** e implican que existe un punto en cada tambor tal que al ser golpeado las autofunciones que describe cada uno de ellos tienen igual amplitud y frecuencia, lo que conduce a que los sonidos sean indistinguibles (en la idealidad). En la Figura 12 se aprecian dos de ellos.

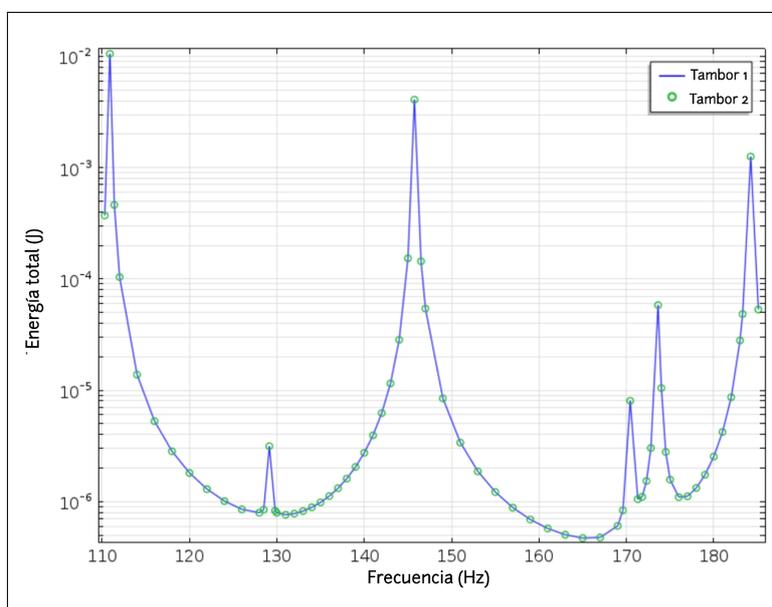
<sup>22</sup>Jürg Peter Buser (n. 1946) es un matemático suizo especializado en geometría diferencial.

<sup>23</sup>John Horton Conway (1937-2020) fue un matemático británico, que realizó contribuciones a la teoría de grupos, teoría de nudos, teoría de números y teoría de juegos.



**Figura 12:** Tambores homofónicos. Llamamos tambor 1 al tambor de la izquierda y tambor 2 al de la derecha.

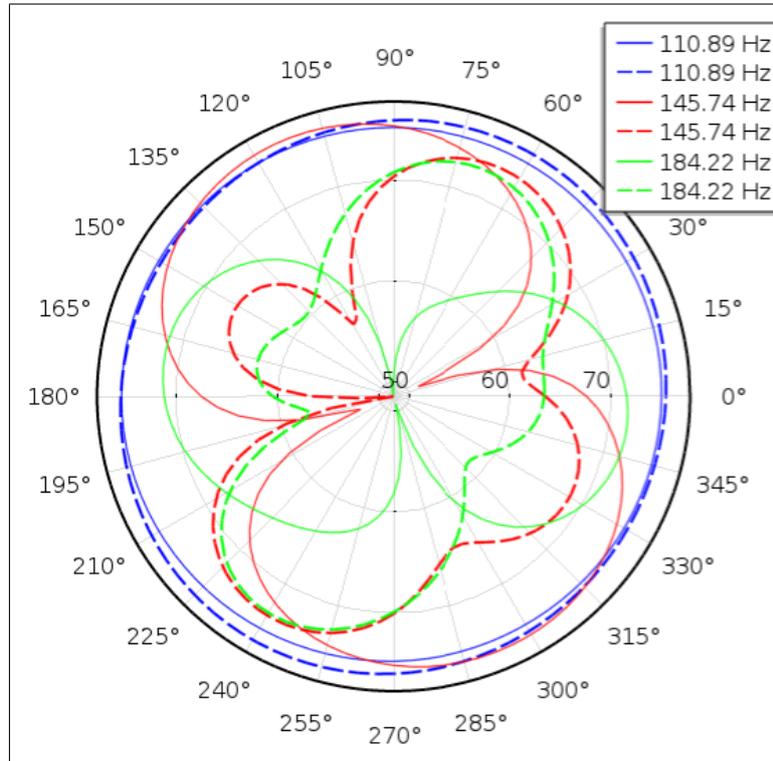
Las respuestas en energía de ambos sistemas fueron graficadas en la Figura 13, y, como se aprecia, parecen idénticas a diferencia de las Figuras 11, pero ¿eso basta para que suenen igual?



**Figura 13:** Espectro de energía emitido a distintas frecuencias al golpear los puntos marcados en la Figura 12.

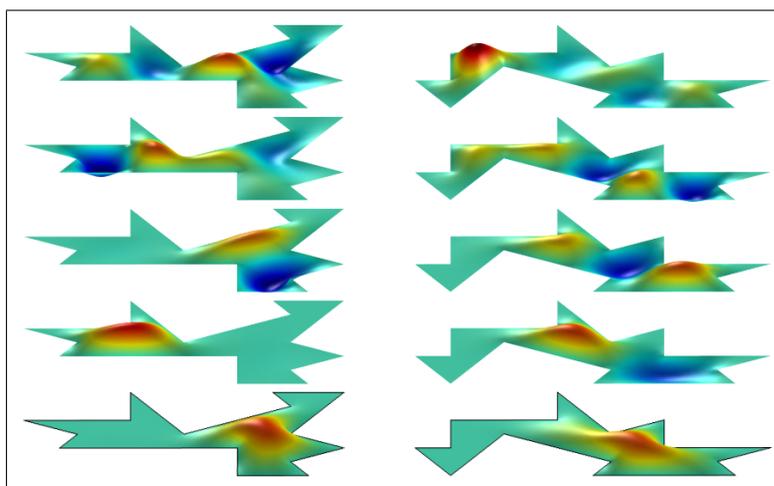
Para responder a esto último debemos agregar otro factor a nuestro análisis. Hasta aquí solamente hemos considerado las vibraciones de las membranas, pero cuando una persona escucha un sonido, no escucha exactamente el objeto que lo produce, sino que escucha el aire que vibra según las ondas de presión transmitidas por dicho objeto.

Con todo esto en cuenta, analicemos la presión en el plano de los tambores, a unos metros de cada uno de ellos:



**Figura 14:** Diferencias de presión causadas por los tambores homofónicos de la Figura 12 a distintas frecuencias. Las líneas sólidas corresponden al tambor 1 y las segmentadas al tambor 2.

Esto demuestra que la diferencia de presión generada no es la misma para ambos tambores, lo cual se debe a la diferencia de los modos de oscilación de ambos tambores (Figura 15) y a la transferencia de energía del aire. En conclusión, a pesar de ser homofónicos, una persona con los ojos tapados caminando alrededor de los tambores sería capaz de distinguirlos.

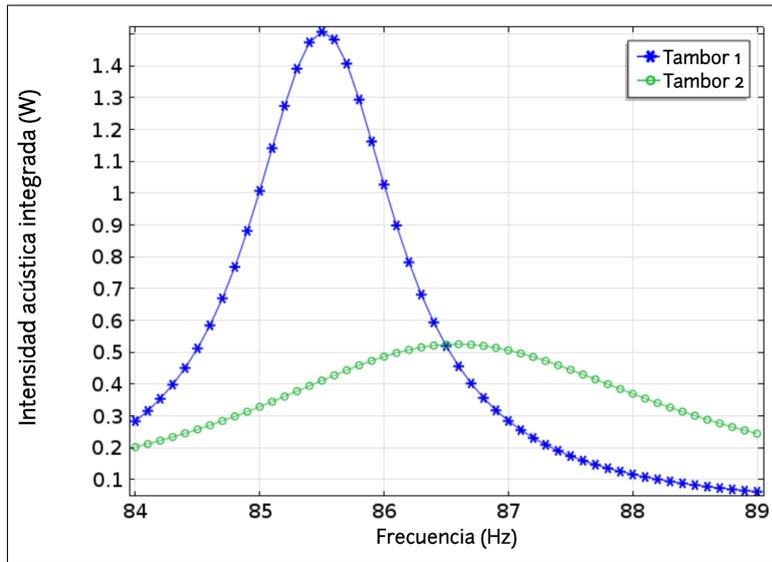


**Figura 15:** Primeros modos de oscilación de los tambores homofónicos de la Figura 12. Estos modos son a los tambores lo que los de la Figura 5 a la cuerda.

### 4.3. Carga del aire

A los factores ya considerados debería sumárseles otro más: cuando la membrana oscila, el aire no solo transmite estas oscilaciones, sino que también provoca una fuerza de reacción. Esto se conoce como **efecto de carga del aire**. Para el modo de frecuencia 146 Hz del tambor 1 discutido en la sección anterior, cuando se considera dicho efecto la frecuencia pasa a ser 86 Hz, una importante discrepancia que provoca un sonido más grave.

Asimismo, si estudiamos la respuesta del otro tambor obtenemos el gráfico de la Figura 16, que muestra una amplia diferencia entre ambos tambores, haciendo demasiado fácil el poder distinguirlos.



**Figura 16:** Energía entregada por unidad de tiempo en función de la frecuencia considerando la carga del aire para los tambores homofónicos de la Figura 12.

## 5. “¿Y esto me sirve para algo?”

Una pregunta que algunos alumnos de secundaria suelen hacerle a su profesor de matemática cuando este les explica algún tema nuevo es: “¿para qué me sirve esto?”, como si intentaran reducir la importancia de los conocimientos presentados a un posible uso que les permita obtener beneficios.

Nosotros no creemos que esta reducción sea correcta puesto que hay resultados en matemática que no tienen un uso concreto en la vida cotidiana o laboral pero que basta su belleza para que valga la pena estudiarlos. Y no estamos solos en esta opinión, pues tenemos de nuestro lado al gran matemático Henri Poincaré<sup>24</sup>: “Los adeptos encuentran en la matemática deleites análogos a los que dan la pintura o la música. Ellos admiran la delicada armonía de los números y de las formas (...) y el gozo que ellos experimentan, ¿no tiene un carácter estético a pesar de que los sentidos no participen? (...) No dudo en afirmar que la matemática merece ser cultivada para su propio propósito, y que las teorías que no admiten aplicaciones en la física merecen ser estudiadas tanto como las otras.”<sup>25</sup>.

¿Y cuál es el caso de la geometría espectral inversa?, ¿solo es importante por su belleza o también tiene aplicaciones prácticas? La respuesta es que efectivamente existen aplicaciones muy interesantes de los resultados que se derivan de ella y de otros relacionados a estos. A continuación veremos algunas.

### 5.1. Mantenimiento de campanas

Esta monografía comenzó con el ejemplo de la cuerda de guitarra, en donde dijimos que es posible determinar la “forma” de esta con la audición, sin verla. Esto podría verse como algo de utilidad práctica, pues si el guitarrista deseara

---

<sup>24</sup>Henri Poincaré (1854-1912) fue un matemático, físico y filósofo francés, que realizó una inmensidad de aportes a la topología, teoría de números, relatividad especial, entre otros.

<sup>25</sup>H. Poincaré, *The Relation of Analysis and Mathematical Physics*, *Bulletin American Mathematical Society*, Vol. 4 (1899), p. 248.

cambiar la nota de la cuerda, podría alargarla o acortarla. No obstante, no es esto lo que se hace para afinar una guitarra, sino que se modifica la tensión, por lo que la forma de la cuerda no se ve alterada. Pero sí existe una aplicación equivalente a un instrumento musical, que no es un cordófono, sino un instrumento de percusión: la campana.

Las campanas han acompañado a la humanidad desde hace cinco milenios, por lo que es de esperar que sus “operadores” hayan realizado grandes perfeccionamientos a lo largo de la historia. Si bien la forma de tocarlas es fácil, su fabricación no lo es en absoluto, pues deben poseer una composición tal que suene la nota deseada al ser golpeada.

Por otro lado, con cada golpe, las campanas se ven sometidas a severas condiciones de tensión y carga mecánica, lo que lleva a la aparición de grietas que las van desafinando. Cuando esto ocurre, las grietas deben ser cerradas y la campana debe ser afinada (esto se logra mediante la remoción de metal). Pero detectar estas grietas no es nada fácil ya que no necesariamente son grandes como para ser simplemente vistas, así que históricamente los fabricantes de campanas debían guiarse por los sonidos emitidos por estas. Es decir, ellos tenían tanta experiencia y un oído tan desarrollado que eran capaces de “escuchar” las grietas, de “escuchar” la forma de las campanas.

## 5.2. Transferencia de estilos

Se le llama **transferencia de estilos** al proceso por el cual, dadas dos formas de entrada (una de pose y otra de estilo), se sintetiza una nueva forma con la pose de la primera y el estilo de la segunda.

Esto se logra tomando los espectros de la entrada y creando a partir de ellos una forma cuyo espectro se alinea con los autovalores de la figura de estilo y que es cercano al espectro de la figura de pose.

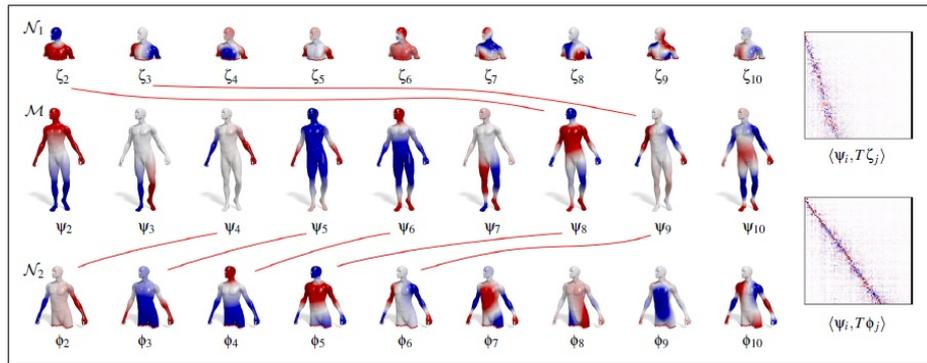


**Figura 17:** Transferencia de estilos: se introducen dos formas de entrada y a partir de ellas se sintetiza una de salida.

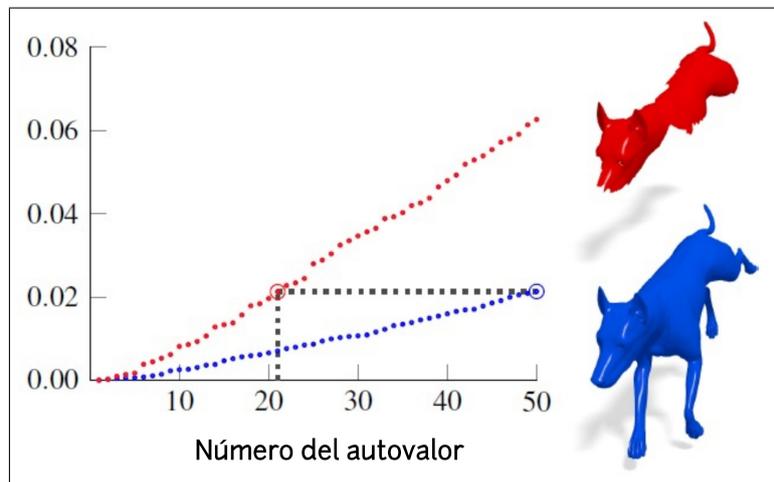
Una de las aplicaciones más importantes de este proceso se encuentra en el campo de las ciencias informáticas, en particular en el de la inteligencia artificial. La razón de esto es que mientras más entrenada sea una computadora en la transferencia de estilos, más capaz es de replicar un patrón a partir de una muestra de este, haciendo que aprenda a realizar diferentes tareas.

### 5.3. Reconstrucción de estructuras

Hemos hablado de la reconstrucción de figuras completas a partir de su espectro, ¿pero sería posible reconstruir una figura completa a partir del espectro de un pedazo de ella? La respuesta, sorprendentemente, es que sí. Esto es posible gracias a que existe una relación entre el espectro de la figura completa y el de la figura “recortada”: algo como que cierta autofunción  $\phi_i$  de la figura parcial es igual a la autofunción  $\psi_j$  de la figura completa (Figura 18 y 19).

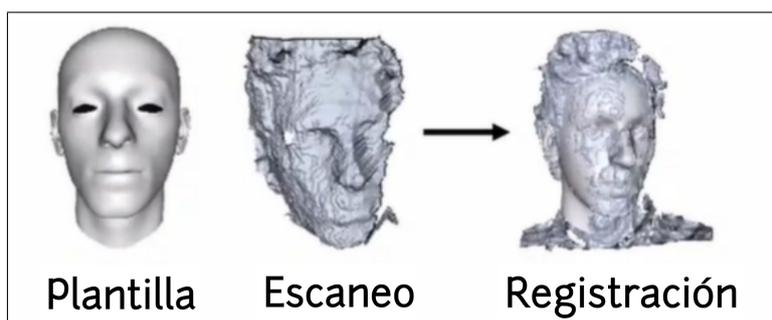


**Figura 18:** Correspondencia entre autofunciones de la figura completa y la figura parcial.

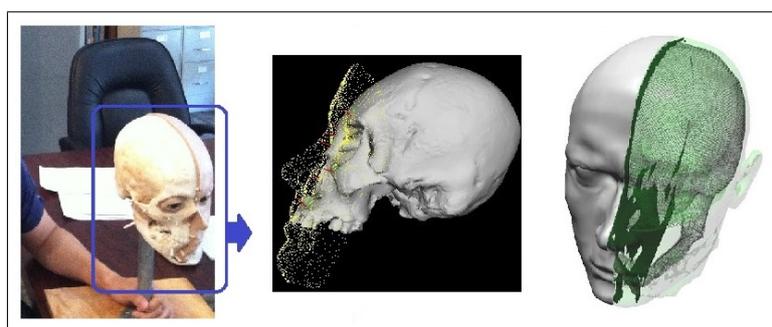


**Figura 19:** Correspondencia entre autovalores de la figura completa y la figura parcial.

Con esta técnica es posible reconstruir, por ejemplo, la cara de un sujeto a partir de una fracción del cráneo. Esto es usado en criminalística para reconstruir la cara de un posible sospechoso a partir de alguna foto (Figura 20) y también en arqueología para reconstruir el cuerpo de seres vivos de quienes se dispone de sus fósiles (Figura 21).

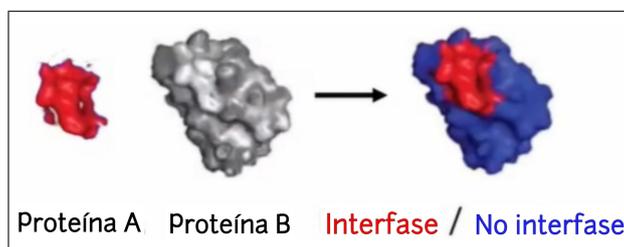


**Figura 20:** Reconstrucción de la cara a partir del escaneo de una parte de ella.



**Figura 21:** Reconstrucción de la cabeza a partir del escaneo de una parte del cráneo.

Otra área en donde se aplica es en bioquímica, por ejemplo cuando se desea hacer encajar una proteína con otra para estudiar cómo puede ocurrir la unión y de qué tipo sería. Así, a partir de una de ellas, se “construye” sobre ella la nueva proteína combinada (Figura 22). Asimismo, algo así puede hacerse con el análisis computacional de estructuras edilicias.



**Figura 22:** Análisis de las interacciones entre dos proteínas.

## 5.4. Exploración de formas

Cuando es conocido el espectro de un cuerpo, no solo es posible aproximarse a la forma de dicho cuerpo, como hemos estado diciendo, sino que también se puede estudiar cómo modificando el espectro dado se modifica el cuerpo al cual se llega.

Es sabido que los autovalores más pequeños contribuyen principalmente a la información global del cuerpo, mientras que los autovalores más grandes contienen información sobre los detalles (Figura 23).



**Figura 23:** Dada una forma de entrada se obtienen nuevas formas prohibiendo el paso de distintas autofrecuencias altas, lo cual cambia la forma global del cuerpo; o permitiendo que pase solo un rango de las autofrecuencias, lo que modifica algunos detalles.

Esto también se utiliza en la modelización de biomoléculas para conocer cómo se vería modificada una de ellas al alterar sus propiedades y componentes químicos.

## Conclusión

En la Introducción de este trabajo expresamos nuestro deseo de explicar algunos aspectos relacionados a la geometría espectral inversa a partir de la pregunta planteada por Mark Kac en 1966 de una forma tal que cualquier persona, independientemente de su formación, pueda entenderlos para deleitarse con algunos de los resultados que aquí presentamos.

Esto último es fundamental porque, muchas veces, la aversión que sienten las personas hacia la matemática o las ciencias exactas se debe a que no se les ha explicado apropiada y vistosamente tales conocimientos. Así ellos se privan de la belleza característica de estas ciencias.

Para alcanzar nuestra meta planteamos el problema de Kac a partir de un sistema sencillo (la cuerda), luego pasamos al caso original (la membrana) para dar respuesta al problema y exponer algunos invariantes espectrales. Una vez que dispusimos de estas ideas, analizamos el problema desde un enfoque físico. Finalmente, hablamos sobre los distintos campos del conocimiento en donde estos resultados tienen aplicación.

Y es que la geometría espectral inversa es tan amplia que hay muchos “lados” desde donde puede atraer a las personas. Por esto, luego de esta conclusión se presentará la bibliografía utilizada, de forma que cualquiera que desee profundizar en esto sepa a dónde buscar.

Desconocemos si hemos cumplido con nuestro propósito, pero esperamos que así haya sido: sería de gran agrado para nosotros enterarnos de que esta monografía plantó semillas de curiosidad e interés en alguno de sus lectores.

*Las verdades de las matemáticas son al intelecto lo mismo que la música al oído y la belleza al ojo (...), pero, en el caso de las matemáticas, el objeto y la facultad son más espirituales, por lo que el deleite es más puro.*

– *John Arbuthnot*<sup>26</sup>

---

<sup>26</sup>J. Arbuthnot, Usefulness of Mathematical Learning. John Arbuthnot (1667-1735) fue un médico, escritor y matemático escocés.

## Bibliografía

- [1] M. Kac, “Can One Hear the Shape of a Drum?” The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Parte 2 (1966).
- [2] S. Kesavan, “Listening to the Shape of a Drum” Resonance, Vol. 3, No. 9, (1998).
- [3] M.E. Fisher, “On Hearing the Shape of a Drum” Journal of Combinatorial Theory, 105-125 (1966).
- [4] B. Linowitz, “Can you hear the shape of a drum?” Oberlin College.
- [5] P. Hagedorn, y A. DasGupta, Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems, Sussex, Inglaterra (2007).
- [6] S. S. Rao, Mechanical Vibrations, 5.<sup>a</sup> ed., Prentice Hall, Miami (2011).
- [7] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics (Vol. I), 3.<sup>a</sup> ed., Estados Unidos (2003).
- [8] (10/06/2017). Can You Hear the Shape of a Drum? (Part 2). Infinity Plus One. <https://infinitypluseonemath.wordpress.com/2017/06/10/can-you-hear-the-shape-of-a-drum-part-2/>
- [9] (01/04/2015). C. Liu, Can We Hear the Shape of a Drum?. COMSOL. <https://www.comsol.com/blogs/can-we-hear-the-shape-of-a-drum/>
- [10] Hearing the shape of a drum. Wikipedia. Fecha de acceso: 23/06/2022. <https://en.m.wikipedia.org/wiki>
- [11] E. Rodolà, S. Melzi, L. Cosmo, M. Bronstein, M. Ovsjanikov [Eurographics Conference]. (3 de mayo de 2021). Inverse Computational Spectral Geometry — Eurographics’2021 Tutorial [Archivo de Video]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=EBJFYxK9Vos>

- [12] (s.f.). K. Josić, Can We Hear Shapes?. Engines of Our Ingenuity. <https://www.uh.edu/engines/epi2613.htm>
- [13] (27/03/1992). B. Cipra, “You can’t hear the shape of a drum” American Association for the Advancement of Science, Vol. 255 (1992).
- [14] (30/12/2015). J. Rowlett, y Z. Lu, Can one hear the corners of a drum?. OUPblog. <https://blog.oup.com/2015/12/drum-shape-mathematics/>
- [15] P. Amore, “One cannot hear the density of a drum (and further aspects of isospectrality)” Universidad de Colima, México (2013).
- [16] X.E. Liu, J.C. Sun, y J.W. Cao, “We can’t hear the shape of drum: revisited in 3D case” (2017).
- [17] J.L. Crespo, J. Altozano [QuantumFracture]. (12 de junio de 2019). ¿Por qué No se Puede Tocar Cumpleaños Feliz en un Tambor? (feat. Jaime Altozano) [Archivo de Video]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=X96olZ1kiKI>