

Concurso de Monografías de la UMA 2019

En memoria del Profesor Roberto Cignoli.

Algunas Propiedades del Movimiento Browniano

Bounos, Ian Evangelos

Agradezco a la profesora Ursula Molter por haber introducido en
clase la noción de Movimiento Browniano y de dimensión de
Hausdorff

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Aclaraciones	5
1.1.1. Breve reseña Histórica	5
2. El Movimiento Browniano	7
2.1. Motivaciones	7
2.2. Definición formal	10
2.3. Principales propiedades	11
2.4. Propiedades de continuidad	13
2.5. No diferenciabilidad	17
3. Dimensión de Hausdorff del Movimiento Browniano	19
3.1. Motivaciones	19
3.2. Medida y Dimensión de Hausdorff	20
3.3. Dimensión del Movimiento Browniano	23
4. Aplicaciones del Movimiento Browniano en las Finanzas	27
4.1. Valuación de opciones	28
4.2. Las críticas de Mandelbrot	30
5. Reflexiones finales	33

Capítulo 1

Introducción

1.1. Aclaraciones

La finalidad de este texto es exponer algunas propiedades del Movimiento Browniano que, a nuestro juicio, puedan resultar *asombrosas*. Para ello, se divide el trabajo en tres capítulos

En el primer capítulo introduciremos el Movimiento Browniano y presentaremos ciertas propiedades que lo caracterizan, tales como su isotropía, su autosimilaridad estadística y algunas propiedades de continuidad, tales como su siempre sorprendente no diferenciabilidad en casi todo punto.

En el segundo, lo utilizaremos como excusa para hablar de un fascinante objeto teoría geométrica de la medida: la medida de Hausdorff. Definiremos y daremos una interpretación intuitiva de la dimensión de Hausdorff y se calculará la de nuestro objeto de interés. Los resultados serán analizados cualitativamente y se mencionarán algunas generalizaciones, como el teorema de Kaufman .

En el tercero descenderemos a ese sitio misterioso que muchos amantes de la matemática solemos ignorar: la realidad. Aquí expondremos fugazmente algunas aplicaciones del Movimiento Browniano a las finanzas.

Dada la naturaleza aleatoria del fenómeno que nos compete, todos los resultados sobre el mismo serán inexorablemente probabilísticos. Por ello, asumiremos cierta familiaridad con los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad (noción de espacio de probabilidad, variable aleatoria y tipos de convergencia). Cuando utilizemos teoremas más potentes, tales como el Teorema Central del Límite o el Lema de Borel-Cantelli, los enunciaremos sin demostración. En algunos momentos usaremos argumentos más bien intuitivos y, en otros, más formales, con el objetivo particular de ser lo mas detallados posible en las pruebas ligadas al cálculo de la dimensión de Hausdorff del Movimiento Browniano.

1.1.1. Breve reseña Histórica

En la Antigüedad Clásica los escritos *Perí physeos* ('Sobre la Naturaleza') eran obras didácticas, usualmente desarrollados en forma de poema que buscaban describir y explicar los fenómenos de la naturaleza. Uno de ellos es *De Rerum Natura* ('Sobre la naturaleza de las cosas'), en el cual su autor, Lucrecio, un atomista seguidor de Demócrito y Epicuro, brinda una descripción de lo que hoy conocemos como Movimiento Browniano:

Observa lo que acontece cuando rayos de sol son admitidos dentro de un edificio y cómo arroja la luz sobre los lugares oscuros. Puedes ver la multitud de pequeñas partículas moviéndose en un sinnúmero de caminos... su baile es un indicio de movimientos subyacentes de materia escondidos de nuestra vista... eso origina el movimiento de los átomos en sí mismos. Entonces los pequeños organismos que son eliminados del impulso de los átomos son puestos en marcha por golpes invisibles y a su vez en contra de unos diminutos cañones. Así, el movimiento de los átomos emerge gradualmente de un nivel del sentido, que estos cuerpos están en movimiento como vemos en el rayo de sol, movidos por soplos que parecen invisibles.

Lucrecio. La Naturaleza de las cosas.

A pesar de la indiscutible precisión de su exposición, el fenómeno no recibe su nombre por Lucrecio sino por el botánico **Robert Brown**, quien en 1827 observó el irregular y vagabundo movimiento de las granos de polen de la planta *Clarkia Pulchella* flotando en el agua e intentó, sin demasiado éxito, brindar una explicación.

En 1900, **Louis Bachelier**, alumno de Poincaré, ofrece el primer modelado matemático del Movimiento Browniano en su Teoría de la especulación. Allí intenta analizar las fluctuaciones en los valores de las Opciones Financieras a través del Movimiento Browniano. Este texto merece sumo reconocimiento desde la óptica matemática, no solo por definir el fenómeno de nuestro interés, sino por ser pionero en el estudio de procesos estocásticos; y también desde la económica, pues, según Mandelbrot [8], se trata de la primera utilización sistemática de la matemática en finanzas y, además de la introducción de la no poco controvertida hipótesis del mercado eficiente.

En 1905, el entonces desconocido trabajador de una Oficina de patentes, **Albert Einstein**, publica un artículo que, bajo el supuesto de que la teoría cinética es correcta -que, dicho de un modo sintético, explica las propiedades macroscópicas de los gases a partir de una descripción estadística de los procesos moleculares microscópicos-, el movimiento de una partícula en un líquido estacionario sigue una trayectoria browniana, pues es producto de una permanente colisión aleatoria con otras partículas. El trabajo es de una relevancia inefable, pues despeja el número de Avogadro en función del desplazamiento cuadrático medio de una partícula browniana, lo cual permitió, en 1908, a Jean Perrin, calcularlo, lo cual le garantizó el Premio Nobel de Física, en 1926.

En 1923, el fundador de la cibernética, **Norbert Wiener**, describe la versión más rigurosa, matemáticamente hablando, del fenómeno y, por ello, también se lo suele conocer como 'Proceso de Wiener'.

Capítulo 2

El Movimiento Browniano

2.1. Motivaciones

Si la lotería es una intensificación del azar, una periódica infusión del caos en el cosmos ¿no convendría que el azar interviniera en todas las etapas del sorteo y no en una sola?

J.L. Borges. La lotería en Babilonia.

El Movimiento Browniano, como dijimos, intenta simular matemáticamente la trayectoria de una partícula suspendida en un gas o líquido, la cual es explicada por la continua colisión con otras partículas. Si quisieramos formarnos una idea de cómo ha de ser dicho movimiento, lo primero que deberíamos pensar es que, en principio, ha de ser de una aleatoriedad total, es decir, no debería privilegiar ninguna dirección por sobre las demás. Proponemos, en primer lugar, pensarlo como una caminata aleatoria discreta:

Podríamos dividir discretamente al tiempo en instantes $0, 1, 2, \dots$ y considerar una partícula que se mueve sólo hacia arriba o hacia abajo. Supongamos también que esa partícula comienza en una posición 0 y que en cada momento 'sortea' si moverse hacia arriba ($+1$) o hacia abajo (-1)

Llamemos Y_k a la posición en el tiempo k . Por hipótesis, $Y_0 = 0$. Luego, Y_1 será como una Bernoulli de parámetro $1/2$, cambiando el valor 0 por -1 (pues no puede preferir ninguna dirección por sobre la otra), es decir:

$$P(Y_1 = 1) = P(Y_1 = -1) = 1/2 \quad (2.1)$$

Si queremos que el movimiento sea 'completamente aleatorio', también hemos de asumir que el sorteo de la dirección que se toma en el momento k no depende del resultado de los sorteos anteriores. Llamemos, por ejemplo, u_k a la dirección que se toma en el momento k , la cual por los mismos motivos tendrá su misma distribución de 'Bernoulli modificada' independiente de las demás. Con esta notación tenemos:

$$Y_{k+1} = Y_k + u_{k+1} \quad (2.2)$$

Lo cual, razonando inductivamente, nos define el siguiente proceso estocásti-

co:

$$Y_k = \sum_1^k u_j \quad (2.3)$$

Como era de esperar, el resultado en la posición k es la suma de todos los sorteos anteriores. Este proceso es conocido como caminata de borracho en dimensión 1.

Observemos que si no queremos que la longitud del paso sea 1, bien podemos definirla como δ y el proceso nos queda:

$$Y_k = \delta \left(\sum_1^k u_j \right) \quad (2.4)$$

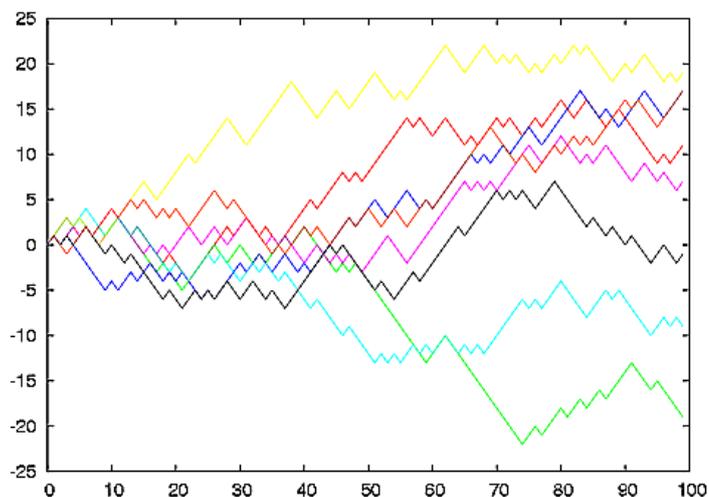


Figura 2.1: Gráfico de varios paseos aleatorios con $\delta = 1$. Extraído de Wikipedia

Ahora se ha de cambiar un poco la perspectiva para pasar del caso discreto al caso continuo. Llamemos $X(t)$ a la posición de la partícula en el tiempo $t \in \mathbb{R}_{>0}$. El problema es que no tenemos definido cuál es la distribución de $X(t)$, pero, a modo aproximado, de la misma manera que antes podemos subdividir al $X(t)$ en instantes de tiempo λ en los que 'se sorteo' si moverse hacia arriba o hacia abajo un paso de tamaño δ . Por lo tanto, nuestro $X(t)$ debería poder aproximarse por algo de la siguiente pinta:

$$X_\lambda(t) = \delta \left(\sum_1^k u_j(t) \right) = \sum_1^k \delta(u_j(t)) \quad (2.5)$$

Donde $k = [t/\lambda]$ (es decir, la cantidad de subintervalos de tiempo en el que partimos al t) y $u_j(t)$ es el sorteo de la dirección en el momento jt/k . Como esto es una mera aproximación, la pregunta natural es ¿Converge a algo a medida que achicamos los subintervalos?

La respuesta es afirmativa únicamente si se elige de forma adecuada el valor de δ . Para demostrarlo, utilizaremos 'el' teorema de la teoría probabilidad:

Teorema 2.1.0.1 (Teorema Central del Límite) Sean X_n numerables variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas de media μ y desvío estándar σ no nulo. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_1^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right) = \phi(z) \quad (2.6)$$

donde $\phi(z)$ es la distribución de una normal estándar O , en otros términos,

$$\left(\sum_1^n X_k - n\mu\right)/\sqrt{\sigma^2 n} \rightarrow^d N(0, 1) \quad (2.7)$$

Observemos, que, como las hemos definido, nuestras $\delta(u_j(t))$ cumplen todas las hipótesis del teorema, pues cada sorteo es independiente de los demás y todas tienen la misma distribución.

Ademas:

1. $E[\delta(u_j(t))] = 0$

Demostración:

$$E[u_j(t)] = \delta P(\delta(u_j(t)) = \delta) - \delta P(\delta(u_j(t)) = -\delta) = \delta/2 - \delta/2 = 0$$

2. $Var[\delta(u_j(t))] = \delta^2$

Demostración:

$$Var[\delta(u_j(t))] = E[(\delta u_j(t))^2] = 1/2 * \delta^2 + 1/2 * \delta^2 = \delta^2$$

Por lo tanto, podemos aplicar el teorema:

$$\left(\delta * \sum_1^k u_j(t)\right)/\sqrt{\delta^2 k} \rightarrow^d N(0, 1) \quad (2.8)$$

o sea que,

$$\sum_1^k u_j(t)/\sqrt{k} \rightarrow^d N(0, 1) \quad (2.9)$$

¡Podemos concluir que si elegimos nuestro $\delta = 1/\sqrt{k}$, $X_\lambda(t)$ converge en distribución a una normal estándar a medida que la longitud de nuestro paso es más pequeño!

pero recordemos que $k = [t/\lambda]$ y que, cuando λ es muy pequeño, k y t/λ pasan a ser indistinguibles, es decir:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} [t/\lambda] * (\lambda/t) = 1 \quad (2.10)$$

utilizando la siguiente propiedad:

Propiedad 1 si X_n es una sucesión de variables aleatorias en un mismo espacio de probabilidad que convergen en distribución a otra variable X , y a_n una sucesión de reales que convergen a $a \in \mathbb{R}$, entonces:

$$a_n X_n \rightarrow^d aX \quad (2.11)$$

Y multiplicando y dividiendo por t/λ a $X_\lambda(t)$, llegamos a la conclusión que $\sqrt{(\lambda/t)}X_\lambda(t)$ converge en distribución a una normal estándar a medida que $\lambda \rightarrow 0$, lo que equivale a que $\sqrt{\lambda}X_\lambda(t) \rightarrow^d N(0, t)$

En resumen: hemos llegado a la conclusión de que para que nuestro movimiento, que comienza en el 0, 'sortee' en cada instante su dirección de una manera 'absolutamente aleatoria', necesitamos que su posición en el momento t se distribuya como una normal con media 0 y varianza t .

Por último, también destaquemos que nuestro movimiento idealizado ha de cumplir la propiedad de no depender de dónde comencemos a mirarlo. Es decir, si la posición en el tiempo t es $X(t) \sim N(0, t)$, entonces para cualquier $s > 0$ ha de cumplirse que cualquier incremento de tamaño t (esto es, $X(t+s) - X(s)$) ha de distribuirse como una $N(0, t)$ y, más aún, ha de ser independiente de cualquier otro incremento de tamaño t .

2.2. Definición formal

Después de tantos argumentos heurísticos, pasemos a definirlo formalmente:

Definición 2.2.0.1 (Movimiento Browniano) Sea $X(t)$ un proceso estocástico con valores reales es un **Movimiento Browniano estándar** o **Proceso de Wiener** si verifica:

1. $X(0) = 0$ casi seguro.
2. El proceso tiene **incrementos independientes**, es decir, para todo $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ los incrementos $X(t_k) - X(t_{k-1})$ son independientes dos a dos para $1 \leq k \leq n$.
3. $\forall t, h > 0$, los incrementos $X(t+h) - X(t)$ se distribuyen como una $N(0, h)$.
4. El proceso es continuo casi seguro, es decir, la función $t \mapsto X(t)$ es continua casi seguro.

Observación 1 Dada la naturaleza aleatoria del fenómeno, varias de sus propiedades no valen en todo punto, si no 'casi seguro' (a partir de ahora c.s.): decimos que el proceso $X(t)$ tiene una propiedad Λ c.s. si existe un conjunto A en la σ -álgebra Ω del espacio muestral tal que $P(A) = 1$ y $A \subset \{\omega \in \Omega : t \mapsto X(t)(\omega) \text{ cumple la propiedad } \Lambda\}$

Observación 2 Hay cierta redundancia en la definición, pues el punto 2) bien puede deducirse de 1) y 3)

Observación 3 En no pocas ocasiones, restringiremos nuestro movimiento a $t \in [0, 1]$, pero la definición es exactamente la misma.

Por otro lado, hay que advertir que en principio, podría ocurrir que dicho movimiento no exista. Observemos que la definición heurística realizada en la sección previa no nos garantiza ni incrementos independientes ni continuidad del proceso, las cuales deberían satisfacerse para cumplir la definición. Sin embargo, el Teorema de Wiener, que enunciaremos sin demostración, nos garantiza su existencia. La demostración puede verse en [11]

Teorema 2.2.0.1 (Teorema de Wiener) *El Movimiento Browniano estándar existe.*

Generalizar el movimiento a dimensiones mayores, y salirnos de la recta, resulta sumamente natural:

Definición 2.2.0.2 (Movimiento Browniano n -dimensional) *Dados $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ Movimientos Brownianos estándar tales que $X_1(t_1), X_2(t_2), \dots, X_n(t_n)$ son independientes para cualquier conjunto de tiempos $t_1, \dots, t_n > 0$, decimos que $X(t) := (X_1(t), \dots, X_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ es un **Movimiento Browniano n -dimensional**.*

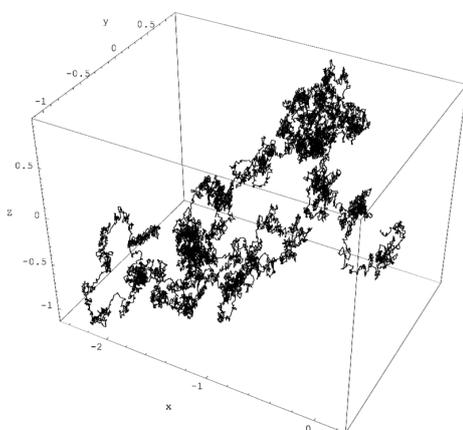


Figura 2.2: Trayectoria de un Movimiento Browniano bidimensional. Extraído de Wikipedia

Aclaración: de ahora en adelante, cuando digamos Movimiento Browniano nos referimos a un movimiento n -dimensional estándar.

2.3. Principales propiedades

If you run Brownian motion in two dimensions for a positive amount of time, it will write your name.

M. Kozdron

Teniendo en cuenta la definición, es esperable que sea indistinguible bajo ciertas transformaciones. Por ejemplo, si nosotros nos alejásemos y luego expandiésemos el gráfico, obtendríamos, nuevamente, un Movimiento Browniano:

Teorema 2.3.0.1 (Invarianza de escala/Autosimilaridad estadística) *Sea $\{X(t) : 0 \leq t\}$ un Movimiento Browniano, $\lambda > 0$. Entonces, el proceso definido como $Z(t) := \lambda^{-1}X(\lambda^2 t)$ resulta un Movimiento Browniano.*

Demostración: La continuidad surge de considerar que la aplicación $t \mapsto \lambda^{-1}X(\lambda^2 t)$ hereda la continuidad de X . La condición de $P(Z(t) = 0) = 1$,

también es inmediata. Probemos la estacionariedad de los incrementos: Como $X_i(t+h) - X_i(t)$ es $N(0, h)$ para cada coordenada i -ésima de X . Para un x_i real arbitrario:

$$P(X_i(t+h) - X_i(t) \leq x_i) = (2\pi h)^{1/2} \int_{-\infty}^{x_i} e^{-x^2/2h} dx \quad (2.12)$$

Podemos hacer un cambio de escala $y = x\lambda^{-1}$ en la integral y podemos concluir que:

$$P(X_i(t+h) - X_i(t) \leq x_i) = P(X_i(\lambda^2 t + \lambda^2 h) - X_i(\lambda^2 t) \leq \lambda x_i) \quad (2.13)$$

De lo que se infiere que la distribución de los incrementos es normal con media 0 y esperanza h . Luego, los incrementos de cada coordenada son estacionarios y por lo tanto, cada X_i es un Movimiento Browniano.

QED

Por otro lado, podríamos preguntarnos qué ocurre si proyectamos un Movimiento n -dimensional en un subespacio más pequeño de dimensión $m < n$. Como es de esperar, resulta un M.B. de dimensión m . Esta propiedad se llama isotropía y significa que es independiente de la dirección desde la que se lo mire. Probaremos el caso bidimensional.

Teorema 2.3.0.2 (Isotropía) *Sea $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ un M.B bidimensional. Luego, para todo θ la proyección en el subespacio $L_\theta := \langle (\cos(\theta), \sin(\theta)) \rangle$ es un M.B de dimensión 1.*

Demostración: la proyección de $X(t)$ en L_θ es $Y(t) := \cos(\theta)X_1(t) + \sin(\theta)X_2(t)$.

Claramente $P(Y(0) = 0) = 1$ y la continuidad se hereda por ser una combinación lineal de continuas c.s.

Además por la propiedad de las distribuciones normales de que, si Z_1, Z_2 son normales independientes, entonces $aZ_1 + bZ_2 \sim N(a\mathbb{E}[Z_1] + b\mathbb{E}[Z_2]; a^2\text{Var}(Z_1) + b^2\text{Var}(Z_2))$.

Luego,

$$Y(t+h) - Y(t) \sim N(0, h\cos^2(\theta) + h\sin^2(\theta)) = N(0, h) \quad (2.14)$$

Lo que prueba los incrementos estacionarios. Se concluye, por lo tanto, que $Y(t)$ es M.B.

QED

Ahora mencionaremos sin demostración una propiedad importante:

Teorema 2.3.0.3 (Inversión temporal) *Sea $X(t)$ un Movimiento Browniano, luego, $Z(t) := tX(1/t) * \mathbb{I}_{t>0}$*

Recordemos que la Ley de los grandes números nos garantiza que si tenemos una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita, tenemos garantizado que el promedio de ellas converge casi seguramente a su media. En este caso, el 'promedio' sería $X(t)/t$ y la media, obviamente, 0.

Corolario 2.3.0.1 (Ley de los grandes números para el Movimiento Browniano)
Sea $X(t)$ un Movimiento Browniano. Luego, casi seguramente $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t)/t = 0$

Demostración: Consideremos $Z(t)$ tal como en el teorema de la inversión temporal. Entonces, $X(t)/t = Z(1/t)$. Y $Z(1/t)$ tiende a $Z(0) = 0$ con probabilidad 1 por continuidad del M.B. Luego, $X(t)/t$ tiende a 0 casi seguro.

QED

La interpretación de este corolario es acerca del comportamiento tras largos períodos de tiempo, cuyo gráfico está, en algún sentido, acotado probabilísticamente entre las rectas $y = x$ e $y = -x$.

Otras propiedades interesantes que mencionaremos sin demostración (las primeras tres pueden verse en [7] y todas en [11]):

1. Con probabilidad 1, la trayectoria del M.B. alcanzará cualquier valor real (y volverá, eventualmente, a cruzar el 0).
2. Casi seguramente, el conjunto de máximos y/o mínimos locales es denso y numerable.
3. **Ley del logaritmo iterado:** $\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t)/\sqrt{2t \log(\log(t))} = 1$ con probabilidad 1. (Observemos que esto es un refinamiento del comportamiento asintótico dado en la versión Browniana de la Ley de los Grandes Números)
4. **Funciones complejas enteras sobre M.B.** Decimos que $Z(t)$ es un M.B. complejo si sus partes real e imaginaria son M.B. Si tenemos una función entera $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ no constante.

Entonces, $f(Z(\phi^{-1}(t))) - f(0)$ es un M.B.

Donde $\phi(t) = \int_0^t |f'(Z(s))| ds$ (cuya inversa existe c.s. por ser estrictamente creciente c.s, ya que una función entera tiene ceros discretos)

2.4. Propiedades de continuidad

Esta sección será una excepción, pues hablaremos de propiedades de cierta suavidad en el Movimiento Browniano, mientras que, en el resto del texto, nos centraremos en su (en algún sentido extrema) irregularidad. La prueba que nos interesa hacer con rigurosidad es que el Movimiento Browniano satisface la condición de Hölder con exponente menor que 1/2, pues es central en la sección ulterior.

La idea de ser Hölder, más fuerte que la de continuidad, es captar cierta 'suavidad' en funciones que no llegan a ser diferenciables, controlando los incrementos por una constante por la distancia de los variables elevada a un exponente.

Definición 2.4.0.1 (Condición de Hölder Local) Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ y $\lambda > 0$. Decimos que f satisface localmente la condición de Hölder con exponente λ si existen un $C > 0$ independiente de λ y un $H > 0$ tal que para todo $x, h \in \mathbb{R}^n$, si $\|h\| < H$, se cumple:

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq C\|h\|^\lambda \quad (2.15)$$

Teorema 2.4.0.1 (Condición de Hölder para $\lambda < 1/2$) Sea $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$. Sea $0 < \lambda < 1/2$. Luego, $X(t)$ cumple la condición de Hölder de exponente λ casi seguro.

Demostración:

Nos restringiremos al caso $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esta restricción es sin pérdida de generalidad, pues los incrementos se distribuyen independientemente del t elegido.

PRIMERA PARTE: analicemos un poco cómo es la distribución de la norma de los incrementos.

$$P(X_i(t+h) - X_i(t) \in [a_i, b_i]) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{a_i}^{b_i} e^{-\frac{x_i^2}{2h}} dx_i \quad (2.16)$$

Ahora, si tenemos un paralelepípedo (a partir de ahora 'cubo') $E = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, como los incrementos son independientes, se distribuyen multiplicativamente cada una de las probabilidades.

$$P(X(t+h)_X(t) \in E) = \prod_{i=1}^n P(X_i(t+h) - X_i(t) \in [a_i, b_i]) = (2\pi h)^{-n/2} \int_E e^{-\frac{\|x\|^2}{2h}} dx \quad (2.17)$$

Como vale para cada 'cubo', podemos aproximar cualquier bola por uniones de 'cubos'. Entonces, tomamos $E = B_\rho(0)$.

$$P(X(t+h) - X(t) \in B_\rho(0)) = (2\pi h)^{-n/2} \int_{B_\rho(0)} e^{-\frac{\|x\|^2}{2h}} dx \quad (2.18)$$

Haciendo un cambio de coordenadas polares,

$$P(\|X(t+h)_X(t)\| \leq \rho) = ch^{-n/2} \int_0^\rho r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2h}} dr \quad (2.19)$$

Donde c es una constante que solo depende de n .

SEGUNDA PARTE: Acotamos la probabilidad de que los incrementos sean mayores que h^λ

Sea $h > 0$. Por la primera parte, tenemos que:

$$P(\|X(t+h) - X(t)\| > h^\lambda) = ch^{-n/2} \int_{h^\lambda}^{+\infty} r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2h}} dr \quad (2.20)$$

Tomando un cambio de variables $x = rh^{-1/2}$

$$P(\|X(t+h) - X(t)\| > h^\lambda) = c \int_{h^{\lambda-1/2}}^{+\infty} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (2.21)$$

Observando que existe c_1 independiente de h y t tal que $x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq c_1 e^{-x}$ para x en el intervalo de la integral,

$$P(\|X(t+h) - X(t)\| > h^\lambda) \leq c_1 \int_{h^{\lambda-1/2}}^{+\infty} e^{-x} dx = c_1 e^{-h^{\lambda-1/2}} \quad (2.22)$$

Ahora, veamos que la expresión de la derecha está acotada por una constante por h^2 :

Observemos que $e^{-h^{\lambda-1/2}}/h^2 \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ si $\lambda < 1/2$. Por lo tanto, dicho cociente se extiende a una función continua entre $[0, 1]$ y, entonces, alcanza su máximo. Es decir, si $h \leq 1$, existe una constante K tal que:

$$e^{-h^{\lambda-1/2}} \leq Kh^2 \quad (2.23)$$

Por lo tanto, concluimos que :

$$P(\|X(t+h) - X(t)\| > h^\lambda) \leq Kh^2 \quad (2.24)$$

TERCERA PARTE: Aplicación del lema de Borel-Cantelli para la obtención del resultado deseado.

Partimos al intervalo $[0, 1]$ en intervalitos de la forma $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$

Definimos $A_k := \{\|X((m-1)2^{-j}) - X(m2^{-j})\| > 2^{-j\lambda}$ para algún $j \geq k$ y $1 \leq m \leq 2^j\}$

Recordemos el Lema de Borel-Cantelli:

Teorema 2.4.0.2 (Borel-Cantelli) Sean A_1, A_2, \dots una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad tal que $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$. Luego, $P(A^\infty) = 0$.

Donde $A^\infty = \bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{k \geq m} A_k$ es la probabilidad de que A_k ocurra infinitas veces

Por lo tanto, probemos que la probabilidad de nuestros A_k es sumable. Observemos que, por la cota de la segunda parte:

$$P(\|X((m-1)2^{-j}) - X(m2^{-j})\| > 2^{-j\lambda}) \leq K2^{-2j} \quad (2.25)$$

Por lo tanto,

$$P(A_k) \leq K \sum_{j=k}^{\infty} 2^j 2^{-2j} = 2K2^{-k} \quad (2.26)$$

Luego, $P(A_k)$ está acotada por una sucesión sumable, y por lo tanto, es sumable. Por el Lema de Borel Cantelli, la probabilidad de que los eventos ocurran infinitas veces es 0 y por lo tanto, la probabilidad de que no ocurran infinitas veces es 1. En otras palabras, con probabilidad 1, existe un k_0 tal que:

$$\|X((m-1)2^{-j}) - X(m2^{-j})\| \leq 2^{-j\lambda} \quad (2.27)$$

Para todo $j > k_0$ y $1 \leq m \leq 2^j$.

Pidamos $|h| < H_0 := 2^{-k_0}$. Observemos que el intervalo $[t, t+h]$ puede expresarse, con excepción de los extremos, como unión numerable de intervalitos de la forma $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$ tales que

1. $2^{-j} \leq h$
2. Que no haya más de dos intervalitos del mismo tamaño

Luego, si k es el mínimo tal que $2^{-k} \leq h$. Tenemos que, con probabilidad 1:

$$\|X(t+h) - X(t)\| \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2 * 2^{-j\lambda} = 2 \frac{2^{-k\lambda}}{(1-2^{-\lambda})} < \frac{2h^\lambda}{(1-2^{-\lambda})} \quad (2.28)$$

Concluimos que, con probabilidad 1, X es Hölder de exponente λ con constante $\frac{2}{(1-2^{-\lambda})}$.

QED

Mencionemos otra propiedad de continuidad interesante: restrinjámonos a Movimientos Brownianos en $[0, 1]$. La pregunta es si existe una función determinística ϕ con $\phi \downarrow 0$ tal que

$$(2.29) \quad \limsup_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{\|X(t+h) - X(t)\|}{\phi(h)} \leq 1$$

Dicha función es llamada 'módulo de continuidad' y mide, en algún sentido, el grado de continuidad uniforme de la función.

El teorema de Levy nos responde afirmativamente:

Teorema 2.4.0.3 (Módulo de continuidad de Levy) : Sea $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un M.B. Luego, casi seguro:

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{\|X(t+h) - X(t)\|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \leq 1 \quad (2.30)$$

Orey y Taylor probaron, en 1974, un resultado más fino:

Teorema 2.4.0.4 (Orey y Taylor) Sea $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un M.B. Luego, casi seguro:

$$\max_{0 \leq t \leq 1-h} \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\|X(t+h) - X(t)\|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 1 \quad (2.31)$$

Notemos que el Teorema de Levy nos permite probar con mayor facilidad que $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Hölder de exponente λ ya que implica que existe un H_0 tal que para todo $0 < h < H_0$:

$$\sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{\|X(t+h) - X(t)\|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \leq 1 + \epsilon \quad (2.32)$$

por lo tanto, para un t arbitrario,

$$\frac{\|X(t+h) - X(t)\|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \leq 1 + \epsilon \quad (2.33)$$

$$\|X(t+h) - X(t)\| \leq (1 + \epsilon) \sqrt{2h \log(1/h)} \quad (2.34)$$

pero la expresión de la derecha, para h suficientemente chico es menor que una constante por h^λ puesto que $h^{1/2-\lambda} \log(1/h) \rightarrow 0$ cuando h tiende a 0 si $\lambda < 1/2$.

Claramente, esto habría facilitado notablemente la prueba de la propiedad de λ -Hölder si no fuera notablemente más difícil y extenso probar el teorema de la existencia del módulo de continuidad.

Lo que tiene de productivo verlo desde el punto de vista del módulo de continuidad es que parece volver mucho más natural el hecho de que λ ha de ser estrictamente menor que $1/2$.

Con respecto al caso $\lambda = 1/2$, puede probarse que con probabilidad 1, existen puntos tales que el M.B es localmente $1/2$ -Hölder. Dichos puntos reciben el nombre de 'puntos lentos'.

2.5. No diferenciabilidad

El Movimiento Browniano es, por su propia definición, continuo en casi todo punto. Más aún, como vimos en la sección anterior, tiene un módulo de continuidad $\sqrt{2h \log 1/h}$.

Ahora la pregunta es ¿Es diferenciable el M.B.? Aquí comienza el lado 'esotérico' pero interesante de nuestro fenómeno: La respuesta a la pregunta es negativa, es decir, con probabilidad 1 el M.B. no es diferenciable. La interpretación de esto es que, intuitivamente, a pesar de ser continua, la trayectoria del M.B. tiene 'picos' (¡No confundir con máximos/mínimos!) por todos lados.

No probaremos el resultado general pero demostraremos resultados parciales:

En primer lugar, nos preguntamos: ¿El M.B. tiene intervalos de monotonía, es decir, intervalos en los que es creciente/decreciente?

La respuesta nos la da esta proposición:

Teorema 2.5.0.1 (No monotonía del M.B.) *Con probabilidad 1, para todo $0 < a < b < \infty$, el M.B. unidimensional no es monótono en $[a, b]$*

Demostración: Sea $X(t)$ M.B. unidimensional. Sea $[a, b]$ un intervalo. Para que X sea monótona allí tenemos como condición necesaria que, dada una partición del intervalo $a = a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$, $X(a_{i+1}) - X(a_i)$ tiene el mismo signo para cada i . Pero dado que cada incremento es una normal de media 0 y son independientes entre sí, la probabilidad de que esto ocurra es 2^{1-m} .

Luego. $P(X \text{ es monótona en } [a, b]) \leq P(\text{ todos los incrementos en la partición tienen el mismo signo}) = 2 * 2^{-m}$.

Como el m es arbitrario, la probabilidad de que X sea monótona allí es arbitrariamente pequeña y por lo tanto, es 0.

QED

Citemos el siguiente resultado acerca del ritmo de crecimiento (que es más débil que la ya mencionada Ley del logaritmo iterado):

Lema 2.5.0.1 *Sea $X(t)$ M.B. unidimensional*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{X(n)}{\sqrt{n}} = +\infty \quad (2.35)$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{X(n)}{\sqrt{n}} = -\infty \quad (2.36)$$

Ahora recordemos que

$$D^* f(t) := \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (2.37)$$

$$D_*f(t) := \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (2.38)$$

Son respectivamente al derivada superior e inferior de una función real, las cuales siempre existen si aceptamos valores $\pm\infty$. Si coinciden y son finitas, decimos que la función es derivable en t y la notamos $Df(t) = D_*f(t) = D^*f(t)$.

Teorema 2.5.0.2 (No diferenciabilidad para t fijo) *Sea $t \geq 0$. Luego, casi seguro, el M.B unidimensional no es diferenciable en t .*

Demostración:

Nos construimos $Y(t) = tX(1/t)$ tomando $Y(0) = 0$. Por el teorema de inversión temporal visto en la tercera sección es un M.B. unidimensional (este es un ejemplo de la suma utilidad de dicho teorema).

Veamos el caso $t = 0$.

$$D^*X(0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X(1/n) - X(0)}{1/n} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}X(1/n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Y(n)}{\sqrt{n}} \quad (2.39)$$

Pero la expresión de la derecha es, por el último lema, $+\infty$ c.s. Luego, $D^*X(0) = +\infty$. De manera análoga, $D_*X(0) = -\infty$ c.s.

Ahora bien, si $t > 0$ es arbitrario, definimos $Z(s) := X(t+s) - X(t)$, que obviamente es un M.B. unidimensional y la derivabilidad de X en t es equivalente a la de Z en 0, la cual ya está probada.

QED

Es importante aclarar que hemos demostrado que, dado un t fijo, con probabilidad 1 X no es diferenciable en t . Pero esto no es lo mismo que con probabilidad 1, X no es derivable en ningún t . Pensemos por ejemplo que en el caso $t > 0$ casi seguro $X(t)$ no es racional, sin embargo, por la continuidad de X , casi seguro existe un t tal que $X(t)$ es racional. Pero en el caso de la diferenciabilidad, si tenemos la certeza de que no es derivable en ningún punto casi seguro. Nos los garantiza el teorema probado por Wiener, Zygmund y Paley, en 1933:

Teorema 2.5.0.3 (No diferenciabilidad en todo punto) *Casi seguro, el M.B. no es derivable en ningún punto. Es más: casi seguro, para todo $t \geq 0$, $D^*X(t) = +\infty$ o $D_*X(t) = -\infty$.*

No mencionaremos la demostración, aunque la idea es muy similar a la utilizada en la prueba de que X es λ -Hölder. Se define una secuencia de eventos basados en una partición del $[0, 1]$ en intervalitos binarios tales que si X fuera diferenciable en algún punto, estos eventos ocurrirían infinitas veces. Se muestra que la probabilidad de cada uno de estos eventos es sumable y, finalmente, se apela a Borel-Cantelli.

Capítulo 3

Dimensión de Hausdorff del Movimiento Browniano

3.1. Motivaciones

Es claro que todos tenemos una noción intuitiva de lo que quiere decir dimensión: una recta es de dimensión 1; un cuadrado, de dimensión 2; una bola, de dimensión 3. También sabemos que a objetos de 'dimensión 1' (sea lo que sea eso) esperamos poder medirlos en términos de longitud; a los bidimensionales y tridimensionales, en términos de área y volumen. Esto parece sugerir algún tipo de relación entre medir un objeto y asignarle una dimensión.

Pero si hay algo que también sabemos es que el espacio contiene conjuntos realmente extraños que podrían resistirse a ser clasificados en términos de dimensiones enteras. Pensemos, por ejemplo, en la curva de Von Koch: ¿Qué dimensión podríamos asignarle? 2 parece ser demasiado, ya que, al menos a primera vista, no parece tener mucho sentido hablar del área de la curva de Von Koch. Por el contrario, 1 se nos revela como demasiado, ya que cualquier pedacito de la curva tiene longitud infinita, es (armoniosamente) irregular y por todos lados está lleno de 'picos'... ¡Tal como ocurre con nuestro conocido Movimiento Browniano!

El objetivo es entonces definir una noción de dimensión que permita clasificar a dichos conjuntos. La pregunta ahora es ¿Qué propiedades ha de cumplir? Falconer propone las siguientes:

1. Los conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n han de tener dimensión n
2. Las variedades diferenciables de dimensión n deben tener esa misma dimensión
3. La dimensión de un conjunto a lo sumo numerable ha de ser 0
4. (Monotonía) $E \subseteq F \rightarrow \dim(E) \leq \dim(F)$
5. (Estabilidad) $\dim(E \cup F) = \max(\dim(E); \dim(F))$
6. (Estabilidad numerable) La dimensión de uniones numerables ha de ser el supremo de las dimensiones.

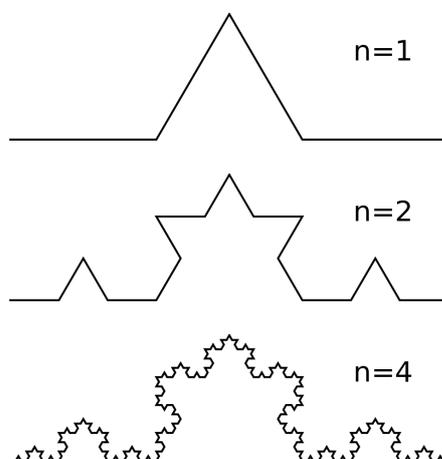


Figura 3.1: Construcción curva de Von Koch. Extraído de Wikipedia

7. si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es Lipschitz entonces $\dim(f(E)) \leq \dim(E)$
8. Si f es una transformación que preserva distancias, $f(E)$ y E tienen la misma dimensión

Claramente hay varias definiciones distintas de dimensión que satisfacen estas propiedades, siendo todas ellas válidas. Además, hay otras que incumplen alguna pero se revelan muy útiles y más maniobrables.

La que consideraremos es la dimensión de Hausdorff, fuertemente basada en la idea de que en una bola abierta $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda(aB) = a^n \lambda(B)$, donde λ es la medida de Lebesgue n dimensional.

Observación 4 Para ser definida, la dimensión de Hausdorff se basa en la medida de Hausdorff, que provee otra forma de medir subconjuntos del espacio. Esto, sumado al hecho de que en esta sección hemos hecho numerosas referencias a longitudes, áreas, volúmenes y medidas en general, puede conducir a la idea de que toda dimensión se define con base en una medida subyacente. Esta idea es errónea, pues hay nociones de dimensión que no se obtienen a partir de una medida.

3.2. Medida y Dimensión de Hausdorff

En esta sección definiremos y mencionaremos resultados sobre medida y dimensión de Hausdorff que se utilizarán a lo largo de la sección.

Definición 3.2.0.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta, \epsilon > 0$.

$$H_\epsilon^\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam}(A_j)^\delta : A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j, \text{diam}(A_j) \leq \epsilon \right\} \quad (3.1)$$

Definición 3.2.0.2 (Medida de Hausdorff de dimensión δ) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$.

$$H^\delta(A) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} H_\epsilon^\delta(A) \quad (3.2)$$

(Observemos que el límite existe porque $H_\epsilon^\delta(A)$ es decreciente con respecto a ϵ y está acotada inferiormente por 0)

Observemos que la medida de Hausdorff es en efecto una medida exterior y, restringida a los borelianos es una medida, es decir:

1. $H^\delta(\emptyset) = 0$
2. $H^\delta(A) \leq H^\delta(B)$ para todo $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$
3. $H^\delta(\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} H^\delta(A_j)$ si los A_j son borelianos disjuntos.

Propiedad 2 Se cumplen las siguientes propiedades para la medida de Hausdorff:

1. La para valores enteros, la medida de Hausdorff es equivalente a la de Lebesgue, es decir: $H^n(A) = w_n \lambda(A)$. Donde w_n es la medida de la bola n dimensional.
2. $H^0(A)$ es el número de puntos que tiene A , pudiendo ser infinito.
3. (**Propiedad de escalamiento**) $H^\delta(\alpha A) = \alpha^\delta H^\delta(A)$
4. $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ Hölder de exponente α con constante c , entonces,

$$H^{\delta/\alpha}(f(A)) \leq C^{\delta/\alpha} H^\delta(A) \quad (3.3)$$

El rol del δ es ser la dimensión con la que se mide el conjunto. Es de esperar, por lo tanto, que si medimos con una medida de dimensión mayor/menor que la de nuestro conjunto, nos de $0/\infty$ respectivamente:

Lema 3.2.0.1 Sean $0 \leq a < b < \infty$. Luego,

1. si $H^a(A) < \infty$, entonces $H^b(A) = 0$
2. si $H^b(A) > 0$, entonces $H^a(A) = \infty$

Demostración:

Si tomamos $\epsilon < 1$. Sea un cubrimiento $A \subseteq \cup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ tal que $\text{diam}(A_j) < \epsilon$.

Luego, $\sum \text{diam}(A_j)^b \leq \epsilon^{b-a} \sum \text{diam}(A_j)^a$.

Tomando ínfimos sobre ambos lados, tenemos que:

$$H_\epsilon^b(A) \leq \epsilon^{b-a} H_\epsilon^a(A) \quad (3.4)$$

Y teniendo en cuenta que $\epsilon^{b-a} \rightarrow 0$, tomando límite obtenemos el resultado.

QED

Es decir, hay a lo sumo un solo valor de δ para el que nuestra medida es finita. Esto motiva la definición de dimensión:

Definición 3.2.0.3 (Dimensión de Hausdorff) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la **Dimensión de Hausdorff** de A como $\dim(A) = \inf\{\delta : H^\delta(A) < \infty\}$

Observación 5 Hay que aclarar una cosa para que el ínfimo de la definición no se tome sobre un conjunto vacío y es que la dimensión de \mathbb{R}^n es precisamente n .

Observación 6 Así definida, la Dimensión de Hausdorff cumple con todas las propiedades deseables de una dimensión expuestas en la sección anterior.

Teorema 3.2.0.1 (Dimensión de conjuntos bajo funciones Hölder) : Sea $A \in \mathbb{R}^n$. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface condición de Hölder con exponente λ , o sea: existe $C > 0$ tal que $\forall x, y \in A$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^\lambda \quad (3.5)$$

Entonces, $\dim(f(A)) \leq \dim(A)/\lambda$

Este teorema será crucial para dar una cota superior de la dimensión del Movimiento Browniano (recordemos que hemos probado que el M.B. es λ -Hölder para $\lambda < 1/2$). El problema será ahora encontrarle una cota inferior.

La idea primero será definir una medida finita que, en algún sentido, esté controlada por el diámetro del conjunto a medir (tal como lo hace la medida de Lebesgue) y utilizarla como cota inferior de la de Hausdorff.

Definición 3.2.0.4 (Distribución de masa) Sea μ una medida sobre un espacio métrico E . Decimos que es una **Distribución de masa** si $0 < \mu(E) < \infty$.

Teorema 3.2.0.2 (Principio de la distribución de masa) Sea $\subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$. Sea μ una distribución de masa sobre A tal que existen $C, \epsilon > 0$ tales que para todo $B \subseteq A$ con $\text{diam}(B) < \epsilon$:

$$\mu(B) \leq C\text{diam}(B)^\delta \quad (3.6)$$

Entonces,

$$H^\delta(A) \geq \mu(A)/C > 0 \quad (3.7)$$

lo cual implica que $\dim(A) > \delta$

Demostración:

Podemos extender μ a todo \mathbb{R}^n como $\mu_A(B) = \mu(A)$ y sigue cumpliendo la propiedad de ser una distribución de masa tal que $\mu(B) \leq C\text{diam}(B)^\delta$ para todo B de diámetro menor que ϵ . Por comodidad, la llamaremos simplemente μ .

Sea A_1, A_2, \dots un cubrimiento de A con diámetro menor que ϵ . Luego

$$0 < \mu(A) \leq \mu(\cup A_j) \leq \sum \mu(A_j) \leq \sum C\text{diam}(A_j)^\delta \quad (3.8)$$

Por lo tanto, tomando ínfimo, obtenemos el resultado deseado.

QED

Este resultado es sumamente útil para calcular, por ejemplo, la dimensión de Hausdorff de conjuntos de Canto: basta con definir una medida adecuada.

Como ya hemos dicho, la definición matemática del Movimiento Browniano está inspirada en la física. Lo mismo ocurre con el siguiente método, que se basa en conceptos propios de esta ciencia. Esto nos revela que intentar inspirarse en conocimientos de otras disciplinas puede ser fructífero para el desarrollo de la matemática (¡y viceversa!):

Definición 3.2.0.5 (s-Potencial) : Sea μ una distribución de masa definida en \mathbb{R}^n . Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$, definimos el **s-potencial** de x con respecto a μ :

$$\phi_s(x) := \int \frac{d\mu(y)}{\|x - y\|^s} \quad (3.9)$$

Definición 3.2.0.6 (s-Energía) : Sea μ una distribución de masa definida en \mathbb{R}^n . Definimos la **s-energía** de μ

$$I_s(\mu) := \int \phi_s(x) d\mu(x) = \int \int \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{\|x - y\|^s} \quad (3.10)$$

Observemos que en el caso particular de $n = 3$ y $s = 1$ tenemos el potencial gravitatorio y la energía de una masa μ

Teorema 3.2.0.3 (Metodo de la energía) Sea $s > 0$, sea μ una distribución de masa sobre $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $I_s(\mu) < \infty$, entonces, $H^s(A) = \infty$ y $\dim(A) \geq s$

La demostración de este teorema, al igual que la de todos los de esta sección pueden verse en el célebre texto de Falconer [3].

Observación 7 Para que todo esto tenga sentido, vale la pena aclarar que hay conjuntos que tienen dimensión Hausdorff no entera. Por ejemplo, la del conocido conjunto de Cantor sobre el $[0, 1]$, es $\log(2)/\log(3) \sim 0,631$, o el de la ya mencionada Curva de Von Koch, que es $\log(4)/\log(3) \sim 1,26$

3.3. Dimensión del Movimiento Browniano

Moralmente, un conjunto es fractal si tiene una estructura muy irregular o rugosa, si se resiste a entrar en las categorías de suavidad usuales en los conjuntos del análisis clásico. Por lo tanto, el Movimiento Browniano debe ser considerado un conjunto fractal. Inspirado en esto, tras haber definido la dimensión de Hausdorff, uno puede proponer que un conjunto es **fractal** si su dimensión es un número no entero. Pero... ¿Es esta definición correcta?

Estamos en condiciones de calcular la dimensión de Hausdorff del M.B. y veremos que es 2. Por lo tanto, esta definición de fractal se nos revela, en cierto modo, insuficiente. Demostremoslo:

Teorema 3.3.0.1 (Dimensión del Movimiento Browniano) Si $n \geq 2$, con probabilidad 1, la trayectoria del Movimiento Browniano n -dimensional (o sea, $X[0, 1]$) tiene dimensión Hausdorff igual a 2

Demostración:

PRIMERA PARTE: Cota superior:

Hemos visto que, para todo $\lambda < 1/2$ el M.B. es λ -Hölder con probabilidad 1

Por lo tanto, por el teorema de dimensión de conjuntos bajo funciones Hölder probado en la sección anterior, con probabilidad 1:

$$\dim(X[0, 1]) \leq \lambda^{-1} \dim([0, 1]) = 1/\lambda \quad (3.11)$$

Como vale para todo $\lambda < 1/2$ podemos concluir que $\dim(X[0, 1]) \leq 2$

SEGUNDA PARTE: Cota Inferior:

Sea $1 < s < 2$. La estrategia es definir una distribución de masa con $I_s(\mu) < \infty$. Si logramos eso, podremos concluir, ya que por el método de la energía, $s \leq \dim(X[0, 1])$.

$$\mathbb{E}[|X(t+h) - X(t)|^{-s}] = \int_{-\infty}^{\infty} x^{-s} f(x) dx \quad (3.12)$$

Donde f es la densidad de la $N(0, h)$. Tomando, como cuando calculamos la distribución de los incrementos, coordenadas polares.

$$\mathbb{E}[|X(t+h) - X(t)|^{-s}] = ch^{-n/2} \int_0^{\infty} r^{-s+n-1} e^{-\frac{r^2}{2h}} dr \quad (3.13)$$

Haciendo un cambio de variables de $y = r^2/h$,

$$(1/2)ch^{-s/2} \int_0^{\infty} y^{\frac{n-s-2}{2}} e^{-\frac{y}{2}} dy = c_1 h^{-s/2} \quad (3.14)$$

Para c solo dependiente de n y c_1 dependiente de s y n .

Por otro lado, el **Teorema de la convergencia monótona para la Esperanza** nos dice que si Y_k es una sucesión de variables aleatorias que converge crecientemente a Y , entonces $\mathbb{E}[Y_k] \rightarrow \mathbb{E}[Y]$. Entonces, para la esperanza de integrales no negativas, las sumatorias relativas a particiones convergen crecientemente a la integral y, por lo tanto, podemos sacar la integral afuera. Es decir:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^1 |X(t) - X(u)|^{-s} dt du\right] = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}[|X(t+h) - X(t)|^{-s}] dt du \quad (3.15)$$

Y hemos visto que la expresión de adentro de la integral es $c_1|t-u|^{-s/2}$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^1 |X(t) - X(u)|^{-s} dt du\right] = \int_0^1 \int_0^1 c_1|t-u|^{-s/2} dt du < \infty \quad (3.16)$$

(Es menor que infinito por que es una integral alrededor del 0 del tipo x^{-p} con $p < 1$ porque $s < 2$).

Definimos la siguiente distribución de masa: dada f , definimos $\mu_f(A) := \lambda\{t : 0 \leq t \leq 1 \text{ y } f(t) \in A\}$, para λ la medida de Lebesgue. Obsérvese que para cualquier función g se cumple que $\int g(x) d\mu_f(x) = \int g(f(t)) dt$. Luego, para estas distribuciones de masa:

$$\infty > \mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^1 |X(t) - X(u)|^{-s} dt du\right] = \mathbb{E}\left[\int \int |x-y|^{-s} d\mu_X(x) d\mu_X(y)\right] \quad (3.17)$$

Pero es sabido que si la esperanza de una variable aleatoria positiva es finita, entonces, la variable aleatoria es finita c.s.

Por lo tanto, para todo $1 < s < 2$, $\infty > \int \int |x-y|^{-s} d\mu_X(x) d\mu_X(y) = I_s(\mu_X)$. Que es precisamente lo que queríamos probar.

Entonces, $2 \leq \dim(X[0, 1]) \leq 2$.

Por lo tanto, $\dim(X[0, 1]) = 2$

QED

Hemos llegado a que, bajo la 'lupa' de la dimensión Hausdorff, el M.B. resulta indistinguible de una superficie bidimensional. No está de más recordar la (intuitivamente inconcebible) existencia de curvas continuas que mapean $[0, 1]$ al cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, como las curvas de Peano o Hilbert, es decir que son 'space-filling', llenan el espacio, y por lo tanto, la dimensión de Hausdorff de su trayectoria ha de ser 2. Pero el Movimiento Browniano no es así: debería haber una forma, con una 'lupa más potente', de diferenciar el M.B. de darle su intuitivamente legítima entidad de fractal. Afortunadamente, esto es posible, definiendo una medida de Hausdorff más refinada:

Vayamos más lejos: en lugar de pedir que la dimensión sea un número real, pidamos que pueda ser una función, una $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ creciente y continua. Extendemos la definición de Hausdorff:

$$H_\epsilon^\phi(A) = \inf \sum \phi(\text{diam}(A_i)) \quad (3.18)$$

Donde el ínfimo se toma sobre los cubrimientos numerables de A con $\text{diam}(A_i) \leq \epsilon$. Por argumentos análogos a los usados para definir la medida de Hausdorff con dimensión real, H^ϕ es el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$

Observemos que si tomamos $\phi(x) = x^\delta$, tenemos que $H^\phi = H^\delta$

Por otra parte, podemos dar una relación de orden a las ϕ de la siguiente forma: $\phi_1 \leq \phi_2$ si y solo si $\lim_{t \rightarrow 0} \phi_2(t)/\phi_1(t) = 0$. En ese caso, se cumple que $H^{\phi_1}(A) < \infty$ implica $H^{\phi_2} = 0$.

Con esta nueva definición, se tiene el resultado $0 < H^\phi(X[0, 1]) < \infty$ para $\phi(t) = t^2 \log(1/t) \log \log(1/t)$ si $n = 2$ y $\phi(t) = t^2 \log \log(1/t)$ para $n \geq 3$.

Lo que ocurre cualitativamente es que $t^{2+\epsilon}/\phi(t)$ tiende a:

1. 0 si $\epsilon > 0$
2. ∞ si $\epsilon < 0$
3. 0 si $\epsilon = 0$

Entonces, hemos logrado refinar nuestra definición para que haya una medida de Hausdorff positiva de nuestro conjunto. Surge naturalmente la pregunta de si con esta definición, dado un conjunto no vacío, necesariamente existe una función de dimensión tal que tal que la medida de Hausdorff con respecto a dicha función es positiva. La respuesta, en este mundo de seres excéntricos que es la geometría fractal, es negativa.

Por último mencionemos una generalización de los resultados obtenidos: El teorema de Kaufman, el cual afirma que todo M.B. de dimensión mayor o igual que 2 sobre un conjunto $A \subset [0, 1]$ dobla la dimensión de A , es decir, $\text{dim}(X(A)) = 2\text{dim}(A)$. (Puede verse en el capítulo 9 de [11])

Capítulo 4

Aplicaciones del Movimiento Browniano en las Finanzas

En 1900 Louis Bachelier escribe su Teoría de la Especulación. Este texto fue perfectamente ignorado por sus contemporáneos. Favoreció a esta indiferencia el hecho de que Francia haya sido en aquel entonces particularmente reacia a la especulación financiera, prueba de ello es que no era permitido operar en corto (Vender acciones que uno no posee para posteriormente comprarlas y beneficiarse ante una baja del precio de dicho activo). En su texto, formula, sin mencionarla, **la hipótesis de los mercados eficientes**, la cual afirma que el precio de un activo, en un instante dado, refleja toda la información disponible en ese momento y que nadie puede asegurarse obtener beneficios apostando a la baja o al alza, por ello, el precio es, en algún sentido, justo. Con base en este supuesto obtiene su 'principio fundamental de la esperanza matemática':

La esperanza matemática [del beneficio] tanto para el comprador como para el vendedor es nula.

Y previamente, había hecho la siguiente afirmación:

En cualquier instante dado, el mercado no cree que el precio vaya a subir o bajar.

Aquí 'el mercado cree' se entiende como el agregado de lo que los compradores y los vendedores creen que va a ocurrir con el precio.

Observemos que esto quiere decir que, como cada instante es un momento de equilibrio entre las fuerzas compradoras y vendedoras (o, como suele decirse en la jerga financiera, entre 'Toros' y 'Osos'), la variación del precio en un instante posterior no es más que un 'sorteo'.

El hecho de que en cada instante se efectúe un 'sorteo' nos suena conocido. Esto no es casualidad: Haciendo supuestos adicionales de independencia y desde una perspectiva ecuacionista, deriva que la variación del precio de un activo es, precisamente un Movimiento Browniano (al que, tal como ocurrió con la Hipótesis de Mercado Eficiente, no nombra).

4.1. Valuación de opciones

Si bien la Teoría de la Especulación y sus dos supuestos fuertes fueron ignorados en su tiempo, la ortodoxia financiera los ha recibido con entusiasmo y han sido omnipresentes hasta que comenzaron sus detractores a fines del siglo pasado. Esta omnipresencia ha implicado que la gran mayoría de sus modelos esconden estos supuestos. Veamos el ejemplo de las ecuaciones de Black-Scholes:

Una opción un tipo de contrato en el que un individuo (el tomador) adquiere un derecho a comprar o vender un activo (el subyacente) a otro individuo (un colocador) en un tiempo y a un precio fijado de antemano. Obsérvese que, a diferencia de los contratos de futuro, se trata de un derecho y no de una obligación (de ahí su nombre de opción)

Definición 4.1.0.1 1. La opción puede ser de tipo *Call*, si se trata de un derecho a comprar; de tipo *Put* si es un derecho a venta.

2. T es el momento de expiración del contrato.

3. K es el 'strike' o precio de ejercicio, es decir el precio al que se fijó el contrato.

4. π , la prima del contrato es el valor que el tomador le paga al colocador por adquirir ese derecho.

5. $S(t)$ es el precio del subyacente, el valor del activo sobre el cual se hace el contrato, en el momento t .

6. Una opción es europea si el contrato solo puede ejercerse el día T (este tipo de opciones será el que trataremos); americana, si puede ejercerse en cualquier momento previo a la fecha de expiración.

A partir de este momento, supondremos que toda opción es europea. A modo de ejemplo: Juan decide comprar una opción de tipo *Call*, que le otorga el derecho a comprar 1 *USD* en un mes a un precio de 44 *ARS* (este sería nuestro K). A día de hoy, el dolar vale 43 *ARS*. La pregunta es ¿Cuánto ha de pagar Juan por dicha opción?

Claramente, $S(0) = 43$. Observemos que Juan comienza a ganar dinero solo si dentro de un mes se cumple que $S(T) \geq 44 + \pi$. Si $S(t) \leq 44$, Juan probablemente decidirá no ejercer la opción y habrá perdido π *ARS* (pero acotando la pérdida máxima). Mientras que si $44 + \pi > S(T) > 44$, él ejercerá la opción, pero habiendo perdido $44 + \pi - S(T)$. Es decir, Juan se beneficiará con la suba del precio, mientras que si el contrato fuera de tipo *Put*, se beneficiaría con las bajas. Por otro lado, él estará menos dispuesto a pagar el derecho si el precio del activo subyacente no tendiera a moverse demasiado, mientras que si esto no ocurriese, poco dispuesto estaría a comprar la opción.

Motivados en el ejemplo de Juan, mirémoslo de una manera un poco más general: Consideremos el 'PayOff' de la siguiente manera:

1. Para una opción tipo *Call*

$$C_t = \max\{S(t) - K; 0\} \quad (4.1)$$

2. Para una opción tipo *Put*

$$P_t = \text{máx}\{K - S(t); 0\} \quad (4.2)$$

Recordemos que una ecuación estocástica es una ecuación diferencial $\text{frac}dXd t = F(X(t), t) + \omega(t)$, donde $\omega(t)$ es una perturbación aleatoria.

Decimos que S es un **Movimiento Browniano Geométrico** si es solución de la ecuación diferencial estocástica $dS := S(t) - S(0) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dX(t)$ donde μ (el 'porcentaje de deriva') y σ (el 'porcentaje de volatilidad') y $X(t)$ es nuestro viejo conocido Movimiento Browniano. Pero... ¿cómo puede ayudarnos esto para valorar una opción?

Hasta la segunda mitad del siglo pasado, no había una manera sistemática de calcularlo. Esto era un problema abierto y resolverlo por un método preciso podía generar cuantiosas ganancias por aprovecharse de las diferencias entre el valor de mercado y el valor teórico. En 1973, Fischer Black y Myron Scholes, inspirados en los supuestos de Bachellier, publican en el *Journal of Political Economy*, un paper que propone un modelo que les garantizaría el Premio Nobel: el Modelo de Black-Scholes. En el hacen los típicamente inverosímiles supuestos que cualquier modelo económico ha de tener:

1. La tasa libre de riesgo r (concepto teórico que supone que existe una alternativa de inversión sin riesgo, que usualmente en la práctica es la tasa de los bonos del tesoro norteamericano) se asume constante.
2. El subyacente no paga dividendos. El incumplimiento de este supuesto suele complicar los cálculos, ya que al pagar dividendos, una acción suele caer por el valor de dicho dividendo y, dado que muchas veces el hecho de que una empresa reparta ganancias es incierto, lo cual afecta, sobre todo a opciones a plazos mayores.
3. No hay oportunidad de arbitraje, es decir, no hay oportunidad de generar ganancias mayores que la r sin asumir riesgos.
4. Siempre es posible prestar o tomar prestada cualquier cantidad (incluso irracional) a la tasa r
5. Es posible vender y comprar el activo subyacente en cualquier cantidad. Incluso, puede venderse en corto.
6. No hay fricción en el mercado, es decir, la compra y venta del activo y de la opción no tiene costos de transacción.
7. Por último: El supuesto que nos interesa: El $S(t)$ se distribuye como un Movimiento Browniano Geométrico.

Obsérvese que el último supuesto implica que μ y σ , que en este contexto nombraremos repectivamente 'tasa de retorno esperado' y 'volatilidad implícita del subyacente', son constantes. Esto es, como veremos en la siguiente sección, muy restrictivo y criticable.

Bajo estos supuestos, de los cuales el de Movimiento Browniano Geométrico es fundamental, Fischer Black y Myron Scholes llegaron a la siguiente fórmula

para calcular la valuación de la opción de acuerdo a si se trata de un *Call* o un *Put*

$$C_t = \phi(d_+)S(t) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_-) \quad (4.3)$$

$$P_t = -\phi(-d_+)S(t) - Ke^{-r(T-t)}\phi(-d_-) \quad (4.4)$$

Donde ϕ es la distribución de una normal estándar y

$$d_{\pm} = \frac{\ln(S(t)/K) + (T-t)(r \pm \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (4.5)$$

Otra fórmula útil es la **fórmula de Black-Scholes** que permite derivar el valor de un *Call* en función de $S(t)$ y de t :

$$C(S(t), t) = S(t)\phi(d_+) - K\phi(d_-) \quad (4.6)$$

4.2. Las críticas de Mandelbrot

El supuesto antes mencionado, de Bachelier (es decir, que el precio de un activo sigue un Movimiento Browniano), se revela, a primera vista, poco serio cuando se trata de representar la realidad, mencionaremos uno entre muchos motivos: Un activo que vale 5 tiene la misma probabilidad de valer 15 que -5 . Solución a ello es el supuesto de log-normalidad en el Movimiento Browniano Geométrico: allí, el logaritmo del precio se comporta como un M.B con deriva (es decir, que la media, en lugar de ser 0 es μ), permitiendo así que se alcancen valores positivos arbitrarios, sin sobrepasar la línea del 0.

El hecho de que haya supuestos cuestionables es comprensible. Permiten elaborar un modelo y, luego, a partir de él, ir suprimiéndolos o debilitándolos, para hacer generalizaciones. El problema aparece cuando uno de esos supuestos es crucial para la obtención del resultado pero dista demasiado de la realidad. En primer lugar, observemos que el supuesto de volatilidad constante es, como dijimos, sumamente restrictivo. De por sí, ya supone algunas complicaciones el hecho de que es desconocida y es necesario estimarla. Para ello, existen métodos, entre ellos, la fórmula de Dupire.

Benoît Mandelbrot, el matemático polaco que popularizó la geometría fractal, en cierto momento, decidió estudiar el comportamiento de los mercados. Comenzó por el de los commodities, en particular, del algodón. Advirtió que el supuesto de Movimiento Browniano Geométrico no parecía representar adecuadamente la realidad, pues en ella, la volatilidad, los cambios bruscos, suelen condensarse en determinados momentos, tras ciertos períodos de tranquilidad. Además la independencia de los incrementos tampoco parece ser creíble, si no, no serían tan frecuentes períodos de subas (o bajas) que inducen emociones de fervor (o de miedo) que influyen en el movimiento del precio del día subsiguiente. Basta con recordar la reciente devaluación que sufrió nuestro país, Argentina, el año pasado.

Volviendo a Mandelbrot, él cuenta que entró en un aula en la cual se acababa de dictar una clase de mecánica de fluidos, acerca de la turbulencia y había gráficos de su volatilidad. Él advirtió una mayor semejanza con lo gráficos de la volatilidad del precio del algodón o del índice industrial del Dow Jones.

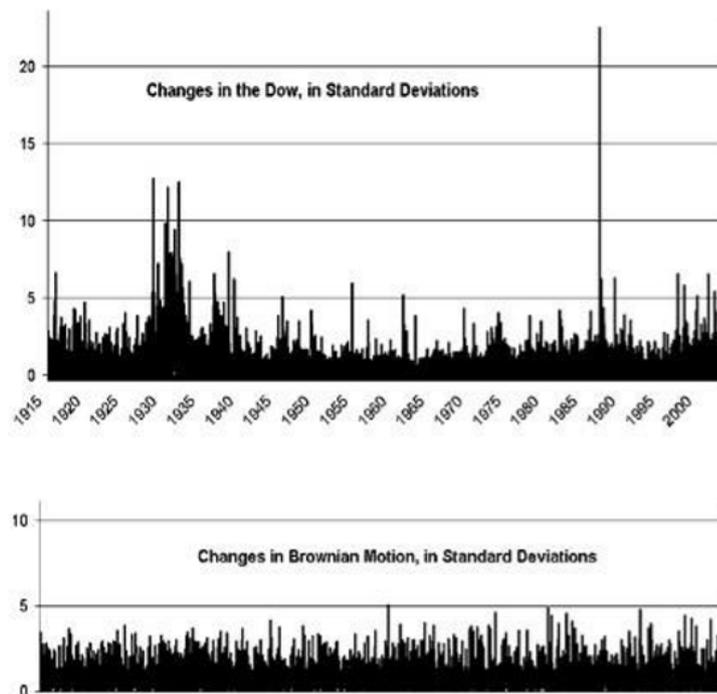


Figura 4.1: Comparación de la volatilidad del logaritmo del Índice industrial de Dow Jones con el de un M.B. Extraído de [8]

Luego propone, en 'The (Mis)behaviour of Markets' [8], una 'nueva vía' de aplicar no solo el concepto de turbulencia al análisis de los mercados, sino también utilizar la geometría fractal para modelar variaciones en precio. Por la naturaleza divulgativa del texto, Mandelbrot no explicitó con rigurosidad matemática cuáles son esos modelos, más que mencionar que están basados en la autosimilaridad estadística de ciertos fractales aleatorios.

Esta crítica hecha por Mandelbrot es una entre muchas que dirigió a todos los métodos utilizados por las finanzas hasta aquel entonces. La dureza de sus críticas, puede resumirse en el capítulo más famoso del texto en cuestión, titulado, 'las diez herejías de las finanzas':

1. Los mercados son turbulentos
2. Los mercados son mucho, mucho más riesgosos de lo que las teorías estándar imaginan.
3. La sincronización del mercado tiene gran importancia. Grandes ganancias y pérdidas se concentran en pequeños paquetes de tiempo.
4. Los precios a veces saltan, no se deslizan. Eso aumenta el riesgo.
5. El tiempo, en los mercados, es flexible.
6. Los mercados, a lo largo del tiempo y el espacio, funcionan de manera similar.

7. Los mercados son esencialmente inciertos y las burbujas son inevitables.
8. Los mercados son engañosos.
9. Predecir precios es peligroso, pero puedes estimar probabilidades de volatilidad futura.
10. Para los mercados financieros, la idea de 'valor', tiene escaso valor.

Claramente, muchas de estas 'herejías' son un ataque directo al supuesto browniano geométrico.

Capítulo 5

Reflexiones finales

En efecto, las ciencias, como ya hemos observado, tienen siempre su origen en la admiración o asombro que inspira el estado de las cosas; como, por ejemplo, por lo que hace a las maravillas que de suyo se presentan a nuestros ojos, el asombro que inspiran las revoluciones del Sol o lo inconmensurable de la relación del diámetro con la circunferencia a los que no han examinado aún la causa.

Aristóteles. Metafísica 1:2.

Cito esta frase de Aristóteles porque, por mi parte, considero que, con frecuencia, al ejercer las matemáticas (y probablemente otras disciplinas), uno olvida el asombro inicial que puede producir cada descubrimiento que se le presenta. De esta manera, con el uso cotidiano, olvidamos hechos que, analizados en sí mismos, son sorprendentes. Basta mencionar que, en el día a día, un profesor de análisis representa curvas a través de letras y números (objetos que a priori, no guardan relación).

Por ello, en la introducción, se presentó como objetivo exponer las propiedades del Movimiento Browniano que puedan resultar asombrosas. Ignoro si el objetivo se ha cumplido, pero voy a enumerar algunas de las propiedades que hemos mencionado a lo largo del texto que, a mi juicio, merecen dicho calificativo.

1. En su definición intuitiva, se mostró que el M.B. está muy relacionado con el Teorema Central del Límite, cuya importancia radical para las matemáticas y la estadística es inestimable.
2. En el capítulo 2 considero que el hecho más llamativo es su no diferenciabilidad a pesar de su continuidad.
3. En el tercer capítulo, el hecho central, que expresa aún más su irregularidad que el ítem pasado, es que su dimensión de Hausdorff es 2, pero que, a pesar de esto, puede diferenciárselo de una superficie refinando la noción de dimensión.

A modo de comentario: cuando digo que esto implica mayor irregularidad que la no-diferenciabilidad me refiero a que existen funciones cuyo gráfico, a pesar de ser continuo, no es derivable en ningún punto, pero tiene dimensión 1. Un

ejemplo es la función de Takagi: $T(x) = \sum 2^{-k} |2^k x - \lfloor 2^k x + 1/2 \rfloor|$ (para más información, ver [6])

En lo que respecta al capítulo cuarto, por un lado, considero que toda aplicación de las matemáticas a otras disciplinas siempre esconde algo de sorprendente. Además, en este caso, me parece particularmente llamativo que el proceso es algo distinto al desarrollo previo, en el cual en primer lugar se observó un fenómeno de la naturaleza (es decir, la trayectoria de una partícula), luego se lo modeló matemáticamente y, luego, se analizaron sus propiedades 'fractales'; mientras que en el caso de la aplicación financiera, se utilizaron conceptos matemáticos previos para modelar la realidad y, luego, observando que la realidad no satisface del todo ese fenómeno, se aprovecha la 'estructura fractal' del fenómeno (que en este caso es el mercado).

Finalmente, creo que, a modo de continuación de trabajo, será interesante ahondar en la propuesta de Mandelbrot: Analizar en qué se ha avanzado hasta el presente y hasta qué punto es superador con respecto a lo previo.

Bibliografía

- [1] BACHELLIER, L. *Théorie de la spéculation* 1900
- [2] CABRELLI, C. y MOLTER, U. *Notas sobre Teoría Geométrica de la Medida* 1998
- [3] FALCONER, K, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 1997
- [4] FELLER, W , *An introduction to probability theory and its applications*(vol I y II), 1968.
- [5] KAHANE, *Some random series of functions*, 1985
- [6] KAWAMURA y ALLAART, *Extreme values of some continuous nowhere differentiable functions*, 2000.
- [7] KOZDROM *A random look at Brownian Motion*, 2002.
- [8] MANDELBROT, B. *The (Mis)Behaviour of Markets* 2004
- [9] MARGALEF ROIG, J y MIRET ARTES, S *Cálculo estocástico aplicado a las nanzas: Precio de las opciones según el modelo Black Scholes Merton y algunas generalizaciones* 2001
- [10] MATTILLA, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. 1995
- [11] PERES, Y. y MÖRTERS, P. , *Brownian Motion*, 2008.