

TEOREMA DE LAX-MILGRAM Y APLICACIONES AL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

En homenaje a María Amelia Muschietti.

Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina
Universidad Nacional del Buenos Aires - Buenos Aires - 2017

Autores: CZENKY, AGUSTINA MERCEDES
VILLAGRA TORCOMIAN, LUCAS

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

In painting there is a creative tension between depicting the shapes, colors and textures of natural objects, and making a beautiful pattern on a flat canvas- Similarly, in mathematics there is a creative tension between analyzing the laws of nature, and making beautiful logical patterns.

- Peter Lax, *opinión sobre la matemática.*

Índice General

1. Sobre los Protagonistas	3
1.1. Arthur Norton Milgram	3
1.2. Peter David Lax	3
1.3. Contexto histórico del teorema	5
2. Teorema de Lax-Milgram	7
2.1. Preliminares	7
2.2. Teorema de Lax-Milgram	9
3. Método de Elementos Finitos	15
3.1. Introducción	15
3.2. Descripción a grandes rasgos	16
4. Aplicación a la ecuación de Poisson	18
4.1. Preliminares	18
4.2. La ecuación de Poisson	20
4.3. Caso unidimensional	20
4.3.1. Lax-Milgram: existencia y unicidad de solución	21
4.3.2. Método de Elementos Finitos: aproximación de la solución	22
4.4. Caso general	24
4.4.1. Lax-Milgram: existencia y unicidad de solución	24
4.4.2. Método de Elementos Finitos: aproximación de la solución	25
4.5. Error en la aproximación	26
Conclusión	29
Bibliografía	29

Capítulo 1

Sobre los Protagonistas

1.1. Arthur Norton Milgram

Arthur Norton Milgram nació el 3 de Junio de 1912 en Philadelphia, Estados Unidos. Obtuvo su doctorado en matemática en la Universidad de Pennsylvania a los 25 años, trabajando bajo la supervisión de John Kline, alumno de Robert Lee Moore, famoso por sus trabajos en Topología.

Influenciado por Kline y Moore, su principal área de interés en sus comienzos fue topología. Sin embargo durante su trabajo como matemático, Milgram hizo contribuciones a diversas áreas, pasando por análisis funcional, combinatoria, geometría diferencial, ecuaciones diferenciales parciales, teoría de Galois y teoría de grafos.

Tal vez una de sus más notables contribuciones es justamente el teorema que escribió en conjunto con Peter Lax. Había desarrollado un gran interés por las ecuaciones en derivadas parciales, en las cuales estaba trabajando cuando falleció en la Universidad de Minnesota Milgram, seis años después de la publicación del teorema que lleva su nombre, con tan sólo 49 años.

1.2. Peter David Lax

Peter Lax nació el primero de mayo de 1926 en Budapest, Hungría, en el seno de una familia acaudalada de origen judío. Sus padres, Henry Lax y Klara Kornfield Lax eran ambos médicos. Fue reconocido desde sus primeros años como un futuro genio matemático, entrando en este mundo a temprana edad gracias a su tío materno, ingeniero eléctrico. Su interés en la matemática no hizo más que crecer con los años, consolidándose en su juventud. Sus padres lo alentaron e incluso le consiguieron una tutora que lo guió a lo largo de su vida en Hungría.

Durante el gobierno de Miklós Horthy, que estuvo al mando de Hungría de 1920 a 1944, la vida y seguridad de las familias judías se vieron amenazadas. Afortunadamente, la familia de Peter Lax reconoció las señales de peligro, y gracias a sus amigos influyentes lograron salir del país rumbo a Nueva York, en 1941.

Al llegar a Nueva York, Lax traía consigo dos cartas de sus mentores en Budapest dirigidas a dos matemáticos Húngaros ya instalados en Estados Unidos: John von Neumann, en Princeton, y Gabor Szegő, en NYU. Ambos le dieron sus recomendaciones, y Lax decidió seguir la de Szegő: iniciarse como estudiante en matemática en NYU bajo la tutela de Richard Courant. Permaneció allí como profesor durante toda su carrera. Con el tiempo, el departamento de matemática de la universidad pasaría a llamarse “Instituto Courant”.

Es así cómo Lax fue guiado, apoyado e inspirado por estos dos personajes desde sus primeros días en América. Tanto Courant como von Neumann compartían una gran pasión por la matemática, a la par de moverse en círculos influyentes de la política estadounidense.

Tras cursar tres semestres en NYU, Peter fue arrastrado hacia el ejército estadounidense. El tiempo de Peter en el ejército lo llevó, gracias a sus talentos, al Proyecto Manhattan y a Los Álamos, donde rápidamente ascendió de operador de cálculos a tareas más matemáticas. Fue allí donde se reúne con von Neumann, quien por su parte era ya un reconocido matemático y ocupaba una posición importante en el Proyecto. Estaba fascinado por un difícil problema físico-matemático: ondas de choques, como la ola de implosión para detonar una bomba de plutonio, o la bomba de presión que causa una explosión atómica.

Estos son fenómenos físicos interesantes. Matemáticamente hablando, son soluciones discontinuas de ciertas ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Predecir dónde y cómo surge la discontinuidad y cómo se propaga sigue siendo hasta el día de hoy un problema profundo y difícil. Peter trabajó en ondas de choques al lado de John von Neumann, y continuó y amplió su trabajo.

Así comenzó la manera particular de Peter Lax de combinar matemática pura y aplicada, la cual guió y caracterizó tanto sus trabajos como su forma de pensar durante toda su vida. En la manera de trabajar de Peter Lax, lo puro y lo aplicado se alimenta y refuerza entre sí, uniéndose de manera inseparable. Dice que le gusta elegir un fenómeno sorprendente, como las olas de choque, y analizarlo matemáticamente. Mientras que un trabajo de esta índole está motivado por la física y produce información valiosa para ella, el análisis en sí mismo, hecho por Lax, es matemática pura. Está precisamente formulado como un problema matemático, y el resultado es rigurosamente

probado.

Peter Lax es considerado uno de los mejores matemáticos aplicados con vida y uno de los mejores matemáticos teóricos con vida. Dedicó su vida a las ecuaciones diferenciales parciales desde el punto de vista teórico, aplicado y computacional. Entre sus múltiples contribuciones destacan los esquemas de Lax-Friedrichs y Lax-Wendroff, el Teorema de Equivalencia de Lax y los “Pares de Lax”.

Por otro lado, la influencia de Peter en el instituto Courant fue particularmente manifestada cuando se convirtió en director. Y fue Peter el primero en una secuencia de cuatro ganadores consecutivos del Premio Abel del Instituto, una secuencia que todavía no ha sido equiparada por ninguna otra institución en el mundo.

Peter es miembro o miembro extranjero de siete academias nacionales, incluyendo La Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos, la Academia de Ciencias de Rusia y, por supuesto, la Academia de Ciencias de Hungría. Tiene nueve doctorados honorarios de universidades en tres continentes. Y junto con su Premio Abel, le fueron otorgadas las más altas distinciones de las tres academias matemáticas estadounidenses (AMS, MAA y SIAM) así también como el Wolf Prize en Matemática, y otros altos honores.

En resumen, Peter Lax creció durante la gran guerra contra el fascismo Nazi, transcurriendo su vida durante medio siglo de Guerra Fría y amenazas nucleares de destrucción mutua asegurada. En el famoso Proyecto Manhattan, en el cual una nueva especie de bomba estaba siendo inventada y desarrollada, Lax fue iniciado en el mundo de la matemática aplicada. Fue un prodigio que cumplió su promesa, último sobreviviente de la gran ola de matemáticos y físicos europeos de las décadas de 1930 y 1940. A una herencia familiar distinguida, aportó un talento brillante, el cual fue tempranamente reconocido y cuidadosamente nutrido tanto en Budapest como en Nueva York. En su trabajo se reconoce una unión inseparable entre la matemática pura y aplicada.

1.3. Contexto histórico del teorema

El Teorema de Lax-Milgram ha sido desde su formulación una pieza fundamental en el campo del análisis funcional. Concebido por los matemáticos Peter D. Lax y Arthur N. Milgram, fue presentado por primera vez en 1952 en una conferencia de tres días sobre ecuaciones en derivadas parciales, llevada a cabo en Arden House, Harriman, Nueva York. Fue publicado dos años después (debido a demoras en la edición) por Princeton University Press a modo de Lema, como una herramienta auxiliar para la teoría de ecuaciones

diferenciales parciales. La importancia de su uso, y las siguientes generalizaciones del mismo, terminaron por darle el nombre de Teorema. Al momento de su publicación, diversas áreas de la matemática se encontraban en un proceso de grandes cambios, debido al surgimiento, estudio y desarrollo del análisis funcional. Si bien la idea de definir espacios de funciones trazaba sus antecedentes hasta finales del siglo XIX, no fue hasta entrado el siglo XX que fue llevada a cabo plenamente. Estos espacios de funciones eran completamente nuevos, y los descubrimientos asociados a ellos se daban de manera vertiginosa.

Es así que a partir del 1900, la teoría que enmarca al análisis funcional empieza a consolidarse y expandirse. En 1910, Hilbert introduce los espacios que llevan su nombre, siendo formalmente axiomatizados después de 1930. A su vez, en 1920, surgen los espacios de Banach, y en 1950, los de Sobolev.

Después de esta primera etapa en la que se presentaron estos nuevos espacios, comienza una segunda etapa, en la que se busca entenderlos y descubrir sus propiedades. Es durante este período que se enuncia el Teorema de Lax-Milgram, que complementa a otros teoremas de representación, formando uno de los bloques básicos sobre los que descansa el análisis funcional.

Desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales, el Teorema de Lax-Milgram se da en un contexto temporal en el que comenzaba el interés por formular problemas en espacios abstractos, capturando sus propiedades y de ser posible, facilitando su planteamiento y resolución. Lax y Milgram formaron parte de este período de ebullición, contribuyendo con un resultado de existencia y unicidad.

El Teorema de Lax-Milgram tuvo una rápida propagación en el mundo de la matemática, y su impacto puede apreciarse no sólo en sus diversas aplicaciones directas, sino también en la teoría, métodos y generalizaciones desarrolladas a partir de él.

Capítulo 2

Teorema de Lax-Milgram

El objetivo de este capítulo será enunciar y dar una demostración del Teorema de Lax-Milgram, repasando primero algunos conceptos básicos necesarios para su formulación.

2.1. Preliminares

En esta sección daremos algunas definiciones de álgebra lineal y análisis matemático, que nos servirán para entender el enunciado y demostración del teorema.

Definición 1. Sea X un conjunto. Una función $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ recibe el nombre de **distancia** si

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

El par (X, d) recibe el nombre de **espacio métrico**.

Definición 2. Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X, d) se dice **convergente** si existe $x \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.

Definición 3. Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X, d) es de **Cauchy** si $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$.

Es fácil demostrar que toda sucesión convergente es de Cauchy. Sin embargo, la recíproca no siempre es cierta. Los espacios en los que sí se cumple tienen propiedades especiales, y por eso reciben un nombre particular.

Definición 4. Un espacio métrico (X, d) se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy converge en X

Combinando ahora estas nociones de completitud con las propiedades de los espacios vectoriales, surgen las siguientes definiciones.

Definición 5. Un espacio de **Banach** es un espacio vectorial normado y completo.

Definición 6. Un **producto interno** en un espacio X es una aplicación $\langle, \rangle : X \times X \rightarrow K$ tal que

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in X$
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in X, \alpha \in K$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Notemos que si un espacio X tiene un producto interno, lo podemos dotar de una norma inducida por éste de la siguiente manera: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Definición 7. Se dice que un espacio X dotado de un producto interno \langle, \rangle es de **Hilbert** si con la norma inducida por éste es un espacio de Banach.

Tenemos entonces definidos los espacios en los que nos interesa trabajar. Veamos algunas propiedades y definiciones sobre las transformaciones lineales entre ellos.

Definición 8. Dado un espacio H normado decimos que $B : H \times H \rightarrow C$ es una **forma bilineal** si cumple que

$$B(\alpha u + v, y) = \alpha B(u, y) + B(v, y) \quad \forall y, u, v \in H, \quad \forall \alpha \in C$$

$$B(x, \beta u + v) = \beta B(x, u) + B(x, v) \quad \forall x, u, v \in H, \quad \forall \beta \in C$$

Definición 9. Una transformación lineal T en un espacio normado está **acotada** si existe una constante positiva $k > 0$ tal que $\|Tx\| \leq k\|x\| \quad \forall x \in X$

Definición 10. La **norma** de una transformación lineal T está dada por

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\}$$

Definición 11. Dada la transformación lineal $T : X \rightarrow Y$, definimos los conjuntos $R(T) = \{T(x) \in Y/x \in X\}$ y $N(T) = \{x \in X/T(x) = 0\}$ llamados **rango** y **núcleo** de T, respectivamente.

Definición 12. Sea $B(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow R$ forma bilineal. Entonces se dice que B es **coercitiva** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que:

$$B(x, x) \geq \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in X$$

Definición 13. Sea $B(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow K$ forma bilineal. Entonces se dice que B es **acotada** si existe una constante $\gamma > 0$ tal que:

$$\|B(x, y)\| \leq \gamma \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in X$$

Definición 14. Una transformación lineal T en un espacio normado X se dice **acotada por debajo** si existe una constante $\beta > 0$ tal que $\beta \|x\| \leq \|Tx\| \forall x \in X$

2.2. Teorema de Lax-Milgram

El Teorema de Lax-Milgram es uno de “representación”. Este tipo de teorema asegura que una estructura abstracta con ciertas propiedades es isomorfa a otra estructura. El nombre se debe a la idea de que un elemento en la segunda estructura “representa” a aquel con el cuál está identificado en la primera vía el isomorfismo. Por su parte, el Teorema de Lax-Milgram asegura que las formas bilineales sobre un espacio de Hilbert son “representables” por elementos del dual de dicho espacio.

En el análisis funcional uno de los teoremas de representación más conocidos es el de Riesz, el cual usaremos fuertemente en la prueba del teorema de Lax-Milgram. Veamos primero el siguiente resultado, seguido de la prueba del Teorema de Riesz.

Teorema. (De Proyección) Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio cerrado de H entonces

$$H = M \oplus M^\perp$$

Demostración. Dado que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal, tenemos que M^\perp es también subespacio de H , y la desigualdad de Cauchy-Schwartz implica que es cerrado. Además si $x \in M \cap M^\perp$ entonces $\langle x, x \rangle = 0$, por lo que $x = 0$. Por lo tanto $M \cap M^\perp = \{0\}$

Basta mostrar ahora que $H = M + M^\perp$. Sea $v \in H$. Veamos que el conjunto

$v - M = \{u \in H / u = v - m, m \in M\}$ tiene un elemento de norma mínima. Sea $d = \inf_{u \in v - M} \|u\|$. Sea (u_n) sucesión en $v - M$ tal que $\|u_n\| \rightarrow d$.

Tenemos que $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in v - M$, y luego existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\|u_n + u_m\| \geq 4d^2$. Combinando esto con la ley del Paralelogramo, obtenemos

$$2\|u_n\|^2 + 2\|u_m\|^2 - \|u_n - u_m\|^2 = \|u_n + u_m\|^2 \geq 4d^2$$

Pero $2\|u_n\|^2 + 2\|u_m\|^2 \rightarrow 4d^2$, resultando de la desigualdad anterior que $\|u_n - u_m\| \rightarrow 0$. Luego (u_n) es de Cauchy, y como el espacio es completo converge. Además como es una sucesión en $v - M$ cerrado, converge a algún $u \in v - M$, con $\|u\| = d$. Por lo tanto, existe un $v_1 \in M$ que minimiza $\|v - v_1\|$.

Definamos ahora $v_2 = v - v_1$, entonces $\|v_2\| \leq \|v_2 + w\| \forall w \in M - \{0\}$, o equivalentemente

$$\|v_2\| \leq \|v_2 - \lambda w\| \forall w \in M - \{0\}$$

donde $\lambda = \frac{\langle v_2, w \rangle}{\|w\|^2}$. Elevando al cuadrado y desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned} \|v_2\|^2 &\leq \|v_2 - \lambda w\|^2 = \|v_2\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda \langle v_2, w \rangle) + \lambda^2 \|w\|^2 \\ &= \|v_2\|^2 - 2 \frac{\langle v_2, w \rangle^2}{\|w\|^2} + \langle v_2, w \rangle^2 \frac{\|w\|^2}{\|w\|^4} \\ &= \|v_2\|^2 - \frac{\langle v_2, w \rangle^2}{\|w\|^2} \end{aligned}$$

Es claro que $\langle v_2, w \rangle$ debe ser cero. Luego $v_2 \in M^\perp$.

Hemos demostrado entonces que $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in M, v_2 \in M^\perp$, que es lo que buscábamos

□

Teorema de Representación de Riesz. *Sea H un espacio de Hilbert, $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ una funcional lineal continua. Entonces existe un único $u \in H$ tal que $f(v) = \langle v, u \rangle \forall v \in H$, y además $\|f\| = \|u\|$.*

Demostración. Si $f = 0$, tomamos $u = 0$ y resulta $f(v) = 0 = \langle v, 0 \rangle \forall v \in H$. Por el contrario, si $f \neq 0$, entonces $N(f) \subset H$. Por continuidad de f , $N(f)$ es un subespacio cerrado de H , por lo que el Teorema de Proyección implica que existe $w \neq 0$ en H con $w \notin N(f)$ tal que $w \perp N(f)$. Es claro que podemos asumir $\|w\| = 1$

Notemos que $\forall v \in H$

$$f(f(v)w - f(w)v) = f(v)f(w) - f(w)f(v) = 0$$

Por lo que $f(v)w - f(w)v \in N(f)$. Como $w \perp N(f)$, entonces

$$0 = \langle f(v)w - f(w)v, w \rangle = f(v)\|w\|^2 - \langle v, \overline{f(w)}w \rangle$$

es decir

$$f(v) = \langle v, \overline{f(w)}w \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall v \in H$$

tomando $u = \overline{f(w)}w$.

Veamos ahora que dicho u es único. Si existieran $u_1, u_2 \in H$ tal que $f(v) = \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle$, entonces

$$\langle v, u_1 - u_2 \rangle = 0 \quad \forall v \in H \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Para probar la segunda afirmación del teorema, notemos que

$$f(v) = \langle v, u \rangle \Rightarrow |f(v)| = |\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$$

por desigualdad de Cauchy-Schwartz. Luego

$$\|f\| = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| \leq \|u\|$$

Si $\|u\| = 0$, entonces $u = 0$ y $f = 0$, por lo que trivialmente $\|f\| = \|u\|$. Si $\|u\| \neq 0$

$$\|f\| = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| \geq \left| f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right| = \left| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, u \right\rangle \right| = \frac{1}{\|u\|} |\langle u, u \rangle| = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \|u\|$$

siendo la desigualdad cierta pues $\|\frac{u}{\|u\|}\| = 1$. □

Lo último que haremos antes de dar paso al teorema será probar un par de lemas técnicos, útiles para su demostración.

Lema 1. Sean V, W espacios normados. Una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ acotada por debajo admite inversa continua $T^{-1} : R(T) \rightarrow V$.

Demostración. Supongamos T acotada por debajo. Entonces existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\beta\|v\| \leq \|Tv\| \quad \forall v \in V \tag{2.1}$$

Luego tenemos $v \in N(T) \Leftrightarrow Tv = 0 \Leftrightarrow \|Tv\| = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ Por lo que $N(T) = \{0\}$ y T es inyectiva. Por lo tanto existe $T^{-1} : R(T) \rightarrow V$. Además, (2.1) es equivalente a

$$\|T^{-1}v\| \leq \frac{1}{\beta}\|v\|$$

Es decir, T^{-1} es acotada, y por lo tanto continua. □

Lema 2. *Sea B un espacio de Banach y $T : B \rightarrow B$ un operador lineal y continuo. Si T es acotado por debajo, entonces $R(T)$ es cerrado en B .*

Demostración. Sea (z_n) sucesión en $R(T)$ tal que $z_n \rightarrow z, z \in B$. Al ser T acotado por debajo, por Lema 1 sabemos que es inyectivo, por lo que existe una única sucesión (v_n) en T tal que $z_n = T(v_n) \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\|z_n - z_m\| = \|T(v_n) - T(v_m)\| = \|T(v_n - v_m)\| \geq \beta \|v_n - v_m\|$

Pero (z_n) es de Cauchy, y de la desigualdad anterior se sigue que (v_n) también es de Cauchy.

Luego, como B es de Hilbert, (v_n) converge a algún $v \in B$, y como T es continua

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(v_n) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n) = Tv$$

Es decir, $z \in R(T)$ y por lo tanto, $R(T)$ es cerrado. □

Teorema de Lax-Milgram. *Sea H un espacio de Hilbert real y $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal, acotada y coercitiva. Si $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal acotada, entonces existe un único $y_0 \in H$ tal que*

$$B(x, y_0) = F(x) \quad \forall x \in H \quad (2.2)$$

Más aún, si B es simétrica entonces

$$y_0 = \min_{v \in H} \left\{ J(v) := \frac{1}{2} B(v, v) - F(v) \right\} \quad (2.3)$$

Demostración. Para cada elemento $u \in H$, la aplicación $B_u : H \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $v \in H$ le asigna $B(u, v)$ es una funcional lineal acotada sobre H , por lo cual el Teorema de Representación de Riesz afirma la existencia de un único elemento $w \in H$ que satisface

$$B(u, v) = B_u(v) = \langle w, v \rangle \quad \forall v \in H \quad (2.4)$$

Como podemos hacer esto para todo $u \in H$, definamos un operador lineal $T : H \rightarrow H$ dado por $T(u) = w$, donde $B(u, v) = \langle v, w \rangle \forall v \in H$.

Veamos primero que T es un operador lineal acotado. En efecto, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $u_1, u_2 \in H$, tenemos que para cada $v \in H$

$$\begin{aligned} \langle T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v \rangle &= B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) \text{ por (2.4)} \\ &= \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v) \\ &= \lambda_1 \langle T(u_1), v \rangle + \lambda_2 \langle T(u_2), v \rangle \text{ por (2.4)} \\ &= \langle \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2), v \rangle \end{aligned}$$

Y como esto vale para todo $v \in V$ resulta T lineal. Además, como B es acotada existe una constante $\alpha > 0$ tal que $|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$, por lo tanto

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u) \rangle = B(u, T(u)) \leq \alpha \|u\| \|T(u)\|$$

Entonces $\|T(u)\| \leq \alpha \|u\| \quad \forall u \in H$, y resulta T acotada.

Por otro lado, como B es coercitiva, existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u, u) = \langle T(u), u \rangle \leq \|T(u)\| \|u\|$$

y luego $\beta \|u\| \leq \|T(u)\|$. Por Lema 1, tenemos que T tiene inversa continua, y por lo tanto es inyectiva. Además, $R(T)$ es cerrado por Lema 2.

Veamos ahora que $R(T) = H$.

En caso contrario, como $R(T)$ es cerrado, existiría un elemento distinto de cero $w \in H$ con $w \in R(T)^\perp$. Pero esto da lugar a la siguiente contradicción $\beta \|w\|^2 \leq B(w, w) = \langle T(w), w \rangle = 0$.

Ahora, nuevamente por el Teorema de representación de Riesz, existe un elemento $w \in H$ que cumple

$$F(v) = \langle w, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Pero como $R(T)=H$, existe $u \in H$ tal que $T(u) = w$. Entonces

$$B(u, v) = \langle T(u), v \rangle = \langle w, v \rangle = F(v) \quad \forall v \in H,$$

que es (2.2). Finalmente, vemos que u es el único que satisface (2.2). En efecto, si hubiera otro $\tilde{u} \in H$ tal que $B(\tilde{u}, v) = F(v)$ para todo $v \in H$, usando la bilinealidad de B tenemos

$$B(u - \tilde{u}, v) = B(u, v) - B(\tilde{u}, v) = F(v) - F(v) = 0$$

Si tomamos $v = u - \tilde{u}$, resulta

$$\beta \|u - \tilde{u}\|^2 \leq B(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = 0$$

y luego $\|u - \tilde{u}\| = 0$.

Para la segunda parte del teorema, suponemos B simétrica, es decir $B(x, y) = B(y, x) \quad \forall x, y \in H$. Sea

$$z = \min_{v \in H} J(v), \quad J(v) := \frac{1}{2} B(v, v) - F(v).$$

Definimos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(\epsilon) = \frac{1}{2}B(z + \epsilon w, z + \epsilon w) - F(z + \epsilon w)$. Como cero es mínimo de la función g , resulta

$$g'(0) = 0. \quad (2.5)$$

Por otro lado, como B es simétrica,

$$\frac{1}{2}B(z + \epsilon w, z + \epsilon w) = \frac{1}{2}B(z, z) + B(z, \epsilon w) + \frac{1}{2}\epsilon^2 B(w, w),$$

por lo que

$$g'(0) = B(z, w) - F(w). \quad (2.6)$$

Luego por (2.5) y (2.6) tenemos $B(z, w) = F(w)$. Por unicidad, $y_0 = z$, que es lo que buscábamos.

□

Capítulo 3

Método de Elementos Finitos

3.1. Introducción

El método de los elementos finitos (MEF) ha adquirido con el uso de las computadoras una gran importancia en la solución de problemas de ingeniería, física, etc., ya que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado coste tanto económico como en tiempo de desarrollo. El MEF permite realizar un modelo matemático de cálculo del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. Sin embargo no deja de ser un método aproximado de cálculo debido a sus hipótesis básicas. El MEF como formulación matemática es relativamente nueva; aunque su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo, en los últimos años ha experimentado un gran desarrollo debido a los avances informáticos. Han sido precisamente estos avances informáticos los que han puesto a disposición de los usuarios gran cantidad de programas que permiten realizar cálculos con elementos finitos.

Aunque el nombre del MEF se ha establecido recientemente, el concepto se ha usado desde hace varios siglos. El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas de ingeniería o física es conocido desde hace mucho. El concepto de ‘elementos finitos’ parte de esa idea. Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podríamos remontarnos a la época de la construcción de las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación

para realizar cálculos. Así el matemático chino Lui Hui (300 d.C.) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3.1416. El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural fundamentalmente en el campo aeroespacial. En los años 40 Courant propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigh-Ritz para aproximar soluciones.

El libro de Zienkiewicz y Cheung presenta una interpretación amplia del MEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En él se demuestra que las ecuaciones de los EF pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, tal como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados. Esta visión del problema difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada.

Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Las computadoras han aportado el medio eficaz para resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF.

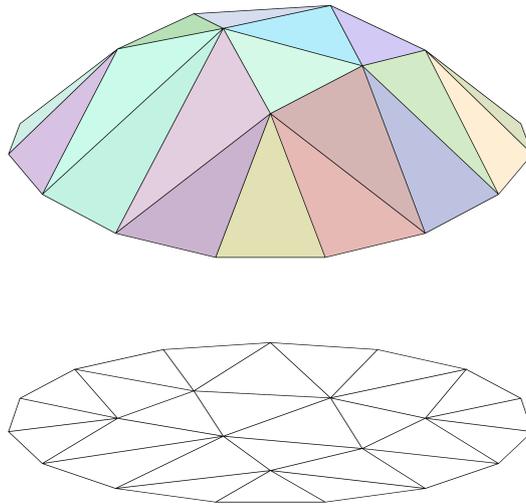
3.2. Descripción a grandes rasgos

El método de los elementos finitos supone, para solucionar el problema, el dominio discretizado en subdominios denominados elementos. El dominio se divide mediante puntos (en el caso lineal), mediante líneas (en el caso bidimensional) o superficies, o volúmenes (en el tridimensional) imaginarias, de forma que el dominio total en estudio se aproxime mediante el conjunto de porciones (elementos) en que se subdivide. Los elementos se definen por un número discreto de puntos, llamados nodos, que conectan entre sí los elementos. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema.

En síntesis, los pasos a seguir para aplicar el MEF son los siguientes:

Paso 1

Se divide el espacio mediante una partición que contiene una cantidad finita de “**elementos**”. Los elementos están conectados entre sí por una cantidad discreta de puntos o “**nodos**”, situados en sus contornos. Asociado a la partición, se construye un espacio vectorial de dimensión finita. Siendo la solución numérica aproximada obtenida por elementos finitos una combinación lineal en dicho espacio vectorial.

**Paso 2**

Se forma un espacio vectorial de dimensión finita mediante la partición y se analiza ahora el problema en este espacio discreto.

Paso 3

Se resuelve el problema en este nuevo espacio.

Paso 4

Se refina la partición para que la aproximación sea tan buena como se quiera.

Capítulo 4

Aplicación a la ecuación de Poisson

4.1. Preliminares

Definición 15. Un **multi-índice** es una n-tupla ordenada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de enteros no negativos. Para cada multi-índice α está asociado el operador diferencial

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n},$$

cuyo **orden** es $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Definición 16. Dado $p \in \mathbb{R}$, al espacio de todas las funciones medibles f definidas en Ω tales que $|f|^p$ es integrable en Ω lo llamamos el **Espacio p de Lebesgue** y lo denotamos $L_p(\Omega)$.

Definiendo

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

se tiene en $L_p(\Omega)$ una estructura de espacio normado.

Observación. L_2 es el único espacio de la familia L_p que es de Hilbert, con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

A partir de los espacios de Lebesgue, podemos definir $L_{loc}^1(\Omega)$, el espacio de funciones de módulo localmente integrable sobre Ω . Es decir, funciones cuyo módulo es integrable sobre cualquier subconjunto compacto K de Ω . Trabajando en este espacio, surge la siguiente definición:

Definición 17. Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es una α -derivada débil de f si

$$\int_{\Omega} f(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx$$

para toda función de prueba φ de soporte compacto.

En otras palabras, si tenemos f y existe una función u que cumple la ecuación anterior para toda φ , decimos que $D^{\alpha} f = u$ en el **sentido débil**.

Definición 18. Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y k un entero positivo. Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones reales f definidas en Ω tales que para cada multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, $D^{\alpha} f$ existe en el sentido débil y pertenece a $L_p \Omega$.

A $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se lo llama **Espacio de Sobolev** de orden k, p .

Notemos que $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial con norma

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|s| \leq k} \int_{\Omega} |D^s f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Además, dado que las derivadas son tomadas de la manera débil, el espacio $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ es completo. Es decir, es un espacio de Banach.

En el caso $p = 2$, definiendo el producto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|s| \leq k} \langle D^s f, D^s g \rangle_{L_2(\Omega)}$$

tenemos que $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Observación. Denotamos $H^k = \mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$. Con el producto interno definido arriba, tenemos que

$$\|f\|_{H^k} = \left(\sum_{i=0}^k \|D^i f\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}$$

Denotamos por $H_0^k(\Omega)$ a la clausura de $C_c^{\infty}(\Omega)$ en $H^k(\Omega)$.

Sea Γ la frontera del dominio Ω . Si además f es continua en la clausura de Ω , entonces f está definida en Γ . Así, tiene sentido definir la **traza** de f , denotada por $\Gamma(f)$, a la restricción de f a Γ .

Tenemos entonces el siguiente espacio de funciones en H^k :

$$H_0^k(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) = \{f \in H^k(\Omega) \mid \Gamma(f) = 0\}.$$

4.2. La ecuación de Poisson

Una de las aplicaciones más comunes del Teorema de Lax-Milgram en las ecuaciones diferenciales parciales es la famosa ecuación de Poisson. La ecuación de Poisson es de gran utilidad para la electrostática, la ingeniería mecánica y la física teórica.

Su nombre se debe al matemático, geómetra y físico francés Siméon-Denis Poisson, quién la publicó en 1812 como corrección de la ecuación diferencial parcial de segundo orden de Laplace para la energía potencial.

Es utilizada, por ejemplo, para describir el campo potencial causado por una cierta carga; una vez conocido el campo potencial, se pueden calcular el campo gravitacional y electrostático.

Fue esta ecuación la razón por la cual Sergei Sobolev definió el espacio $H^1(\Omega)$ en un principio, pues era el espacio natural para resolverla.

La forma general de la ecuación es

$$\Delta u = f, \quad (4.1)$$

donde Δ es el operador de Laplace:

$$\Delta u = \nabla^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Analizaremos el problema de la ecuación de Poisson agregando la condición de frontera de Dirichlet. Esto es, vamos a buscar resolver la ecuación en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con la condición de frontera

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega = \Gamma. \quad (4.2)$$

Esta condición restringe la búsqueda de soluciones al espacio H_0^1 , cuyos elementos necesariamente cumplen (4.2).

4.3. Caso unidimensional

En el caso unidimensional, tomamos $\Omega = (0, 1)$, y la formulación fuerte del problema de Dirichlet toma la forma

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0, 1) \\ u(x) = 0 & x = 0, 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

4.3.1. Lax-Milgram: existencia y unicidad de solución

Veamos ahora que, gracias al teorema de Lax-Milgram, podemos garantizar la existencia y unicidad de solución del problema (4.3). Para esto, comenzaremos primero por reformularlo, llevándolo a su forma débil, y luego verificaremos que dicha reformulación se encuentra bajo las hipótesis del teorema de Lax-Milgram.

Multiplicando a ambos lados por la función de prueba $v \in D(\Omega)$ e integrando por partes obtenemos

$$\int_0^1 f v dx = - \int_0^1 u'' v dx = -v u'|_0^1 + \int_0^1 u' v' dx.$$

Dado que $v u'|_0^1$ se anula, pues buscamos funciones en $H_0^1(0, 1)$, resulta

$$\int_0^1 f v dx = \int_0^1 u' v' dx.$$

Definamos entonces

$$B(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx \quad , \quad F(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

Luego, el problema (4.3) puede ser reformulado en su forma débil:

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1). \quad (4.4)$$

Como podemos ver, esto tiene la forma usual del problema que resuelve el Teorema de Lax-Milgram, puesto que B es claramente bilineal y F una funcional lineal. Sin embargo, antes de poder aplicar este teorema, debemos verificar las condiciones de acotamiento y coercitividad.

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz vemos que

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \int_0^1 |u'(x) v'(x)| dx \leq \left(\int_0^1 |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|u'\|_{L_2(0,1)} \|v'\|_{L_2(0,1)} \\ &\leq M \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

Es decir, B es acotada.

Por otra parte, por la desigualdad de Poincaré-Friedrichs, notamos que

$$B(v, v) = \int_0^1 |v'(x)|^2 dx = \|v'\|_{L_2(0,1)}^2 \geq \delta \|v\|_{H_0^1(0,1)}^2.$$

Por lo tanto B es también coercitiva.
Finalmente vemos que

$$|F(v)| = \left| \int_0^1 f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{L_2(0,1)}^2 \|v\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \|f\|_{L_2(0,1)}^2 \|v\|_{H_0^1(0,1)}^2.$$

Luego, F es acotada. Entonces estamos en las condiciones del Teorema de Lax-Milgram, que asegura que el problema de Dirichlet unidimensional tiene solución única.

4.3.2. Método de Elementos Finitos: aproximación de la solución

Retomamos la ecuación (4.3). Ya sabiendo que existe una única solución, estamos en condiciones óptimas para desarrollar el MET, con el que vamos a aproximarla. Retomando la numeración de los pasos a seguir con el método, tenemos que:

Paso 1

Definición 19. Una **partición** de $\Omega = (0, 1)$ es una división de este dominio en subintervalos, dada de la siguiente forma:

$$[0, 1] = \bigcup_{j=1}^n [z_{j-1}, z_j]$$

donde $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n-1} < z_n = 1$. Las constantes z_i son llamadas **vértices** o **nodos** y los subintervalos $I_j = [z_{j-1}, z_j]$ son denominados los **elementos** del método.

Paso 2

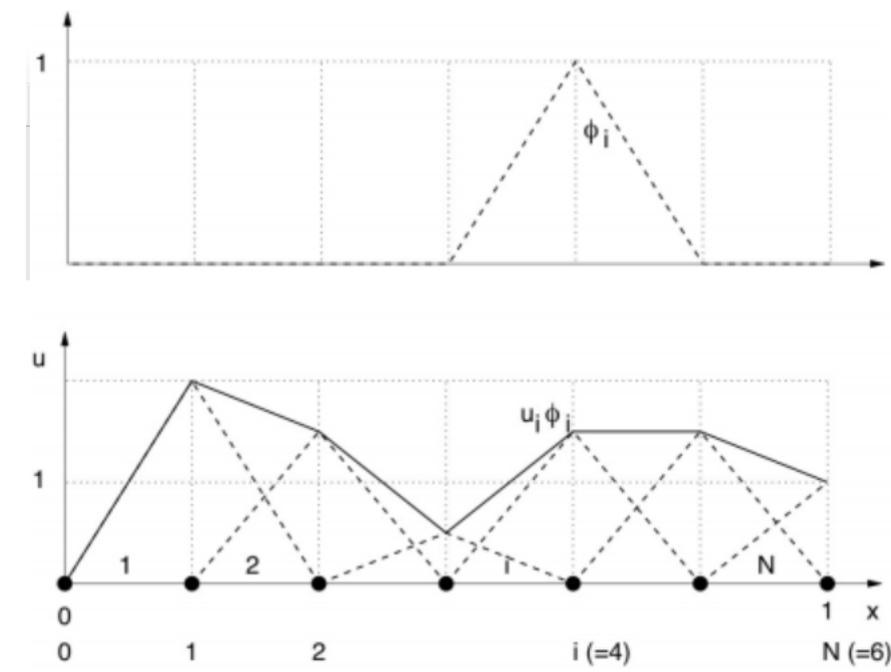
Dada una partición del $(0, 1)$, sean $h_j = z_j - z_{j-1}$, $h = \max_{j=1, \dots, n} h_j$. Vamos a definir un espacio de funciones lineales continuas definidas por partes de la siguiente forma:

$$V_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_h}\},$$

donde

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} (x - x_{j-1})/h_{j-1} & x \in I_j \\ (x_{j+1} - x)/h_{j+1} & x \in I_{j+1} \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

Así resulta V_h un subespacio de $H_0^1(0, 1)$.



Paso 3

Reemplazamos entonces la formulación débil del problema original en este nuevo espacio:

$$B(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4.5)$$

Aprovechando que, a diferencia de $H_0^1(0, 1)$, $\dim(V_h) < \infty$ vamos a discretizar el problema.

Como $v_h, u_h \in V_h$, escribimos $v_h = \sum_{i=1}^{n_h} v_i \varphi_i$, $u_h = \sum_{j=1}^{n_h} u_j \varphi_j$.

Luego, como B es bilineal y F lineal, tenemos:

$$B(u_h, v_h) = \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx = \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} u_i v_j \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx = \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} u_i v_j B(\varphi_i, \varphi_j),$$

$$F(v_h) = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx = \sum_{j=1}^{n_h} v_j \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = \sum_{j=1}^{n_h} v_j F(\varphi_j).$$

Definimos entonces $a_{ij} = B(\varphi_i, \varphi_j)$, $b_j = F(\varphi_j)$, $1 \leq i, j \leq n_h$.

El problema se resume a hallar la solución $u \in \mathbb{R}^{n_h}$ del problema

$$\langle Au, v \rangle = \langle b, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n_h},$$

donde $A = (a_{i,j})$, $b = (b_j)$, $u = (u_i)$, $v = (v_j)$.

Notemos entonces que $\langle Au, v \rangle = \langle b, v \rangle \Rightarrow \langle Au - b, v \rangle = 0$ y $\langle Au - b, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n_h} \Leftrightarrow Au = b$.

Luego el problema es hallar la solución $u \in \mathbb{R}^{n_h}$ del sistema lineal $Au = b$.

Numéricamente hay muchos métodos que se pueden utilizar para resolver el sistema, pero ese no es el fin del ejemplo.

Una vez resuelto el problema, obtenemos la solución u y reconstruimos a u_h , solución del problema (4.3)

Paso 4

Veremos que $u_h \rightarrow u$ cuando $h \rightarrow 0$ más adelante.

4.4. Caso general

Los razonamientos empleados en el caso unidimensional pueden generalizarse a dimensión arbitraria.

En dimensión n , la ecuación de Poincaré con condición de Dirichlet en la frontera queda:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.6)$$

Con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

4.4.1. Lax-Milgram: existencia y unicidad de solución

Definiendo como antes

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad , \quad F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

y usando el Teorema de la divergencia obtenemos que el problema (4.6) nuevamente toma la forma

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Por lo tanto, aplicando Lax Milgram de manera análoga, obtenemos existencia y unicidad de solución.

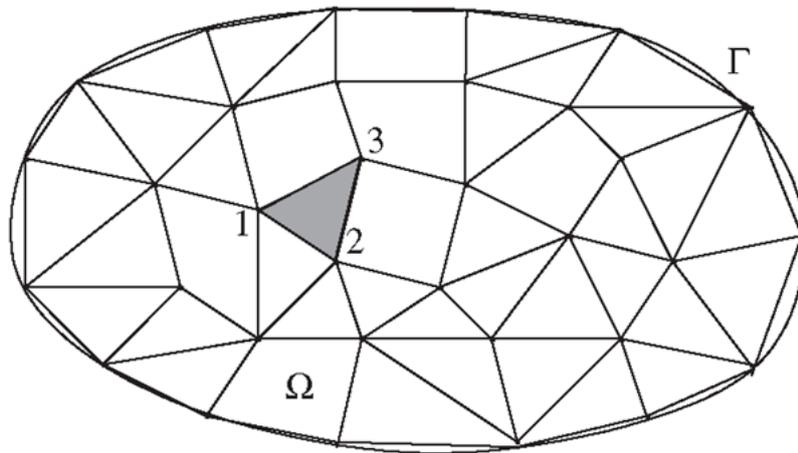
4.4.2. Método de Elementos Finitos: aproximación de la solución

El MEF también lo podemos aplicar en dimensión n . Por ejemplo, cuando $n = 2$ tenemos:

Paso 1

Definición 20. Una **triangulación** de un dominio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una subdivisión de Ω en un conjunto finito de triángulos satisfaciendo la siguiente propiedad: ningún vértice de la partición pertenece al interior de alguna arista de un triángulo.

Los triángulos son los “elementos” del método.



Paso 2

Dada una triangulación τ de Ω , sea $h = \max_{T \in \tau} \text{diam}(T)$. Definimos como antes

$$V_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_h}\}$$

un subespacio de $H_0^1(\Omega)$

Reemplazamos entonces la formulación débil del problema original en este nuevo espacio:

$$B(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Aprovechando que, a diferencia de $H_0^1(\Omega)$, $\dim(V_h) < \infty$ discretizamos el problema.

Como $v_h, u_h \in V_h$, entonces $v_h = \sum_{i=1}^{n_h} v_i \varphi_i$, $u_h = \sum_{j=1}^{n_h} u_j \varphi_j$

Luego, como B es bilineal y F lineal, tenemos que:

$$B(u_h, v_h) = \int_0^1 \nabla u_h(x) \nabla v_h(x) dx = \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} u_i v_j B(\varphi_i, \varphi_j)$$

$$F(v_h) = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx = \sum_{j=1}^{n_h} v_j F(\varphi_j)$$

Definimos entonces $a_{ij} = B(\varphi_i, \varphi_j)$, $b_j = F(\varphi_j)$, $1 \leq i, j \leq n_h$

Paso 3

El problema se resume a hallar la solución $u \in \mathbb{R}^{n_h}$ de

$$\langle Au, v \rangle = \langle b, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n_h}$$

donde $A = (a_{ij})$, $b = (b_j)$, $u = (u_i)$, $v = (v_j)$.

Notemos entonces que $\langle Au, v \rangle = \langle b, v \rangle \Rightarrow \langle Au - b, v \rangle = 0$ y $\langle Au - b, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n_h} \Leftrightarrow Au = b$

Luego el problema es hallar la solución $u \in \mathbb{R}^{n_h}$ del sistema lineal $Au = b$

Una vez resuelto el problema, obtenemos la solución u y reconstruimos a u_h , solución de (4.6)

4.5. Error en la aproximación

Para ver la buena aproximación, generalmente se utiliza el Lema Céa, que básicamente nos dice que el error de la aproximación en el MEF depende esencialmente del espacio V_h

Lema 3. (De Céa) *Sea V un espacio de Hilbert. Sea $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada coercitiva, y sea $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ un operador lineal. Si consideramos el problema de hallar $u \in V$ tal que $B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$ y consideramos el mismo problema en un subespacio de dimensión finita V_h de V , entonces el Teorema de Lax-Milgram nos asegura que estos problemas tienen única solución u y u_h respectivamente, y además vale que:*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\| \quad \forall v \in V$$

Demostración. Dado que B es bilineal, se sigue que la aproximación del error $e := u - u_h$ satisface que

$$B(e, v) = B(u, v) - B(u_h, v) = F(v) - B(u_h, v) =: R(v)$$

donde $R(v)$ es el **residuo**. Notemos que el residuo es una función lineal en V . Luego, el problema para la aproximación se reduce a encontrar $e \in V$ tal que $B(e, v) = R(v) \quad \forall v_h \in V_h$

Más aún,

$$B(e, v_h) = R(v_h) = F(v_h) - B(u_h) = F(v_h) - F(v_h) = 0 \quad \forall v \in V$$

Ésta es la propiedad de ortogonalidad de Galerkin, que va a tener un papel fundamental en la estimación.

Usando la propiedad coercitiva de B , introduciendo una función arbitraria $w_h \in V_h$, usando la propiedad de ortogonalidad y que B es acotada, tenemos que:

$$\alpha \|e\|^2 \leq B(e, e) = B(e, u - u_h) = B(e, u - w_h + w_h - u_h) = B(e, u - w_h) \leq \gamma \|e\| \|u - w_h\|$$

Luego,

$$\|e\| \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - w_h\|$$

Como w_h es arbitrario, entonces

$$\|e\| = \frac{\gamma}{\alpha} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|$$

□

Observación. Si B es simétrica entonces podemos mejorar la cota. En efecto, como B es simétrica podemos definir una norma $\|\cdot\|_e$ llamada **norma energética**:

$$\|v\|_e = \sqrt{B(v, v)} \quad \forall v \in H$$

Usando Cauchy-Schwartz tenemos que B es continua con constante de continuidad $\gamma_e = 1$ y coercitiva con constante de coercitividad $\alpha_e = 1$.

Como $e \in H$, para cualquier $w_h \in V_h$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \|e\|^2 &= B(e, e) = B(u - w_h + w_h - u_h, u - w_h + w_h - u_h) \\ &= B(u - w_h, u - w_h) + B(w_h - u_h, w_h - u_h) + 2B(u - w_h, w_h - u_h) \\ &= B(u - w_h, u - w_h) + B(w_h - u_h, w_h - u_h) - 2B(w_h - u_h, w_h - u_h) \\ &= B(u - w_h, u - w_h) - B(w_h - u_h, w_h - u_h) \\ &= \|u - w_h\|_e^2 - \|w_h - u_h\|_e^2 \\ &\leq \|u - w_h\|_e^2 \end{aligned}$$

Luego,

$$\|e\|_e \leq \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_e$$

Además, la norma energética es equivalente a la de H , ya que

$$\alpha \|v\|^2 \leq B(v, v) = \|v\|_e^2 \leq \delta \|v\|^2 \quad \forall v \in H$$

Luego, combinando las dos inecuaciones tenemos que:

$$\|e\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|e\|_e \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_e \leq \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|$$

Retomando en nuestro ejemplo, dado que

$$B(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v'(x)u'(x)dx = B(v, u) \quad \forall u, v \in V = H_0^1(\Omega)$$

entonces B es simétrica. Por lo dicho antes, define una norma

$$\|u\|_e \leq \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_e$$

Por el lema de Céa, para ver la buena aproximación basta encontrar una cota para $\inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_e$. Se demuestra en general, que podemos acotar esta norma en función de h ; más específicamente se llega a que la aproximación es $O(h)$.

Esto nos dice que haciendo una buena elección de h , podemos achicar nuestro error tanto como queramos. Es decir, en nuestro caso en particular, resulta que

$$\|u_h - u\|_e \leq Ch$$

y por lo tanto $u_h \rightarrow u$, que es lo que queríamos ver.

Conclusión

El Teorema de Lax-Milgram es de gran importancia tanto para el Análisis Funcional como para las ecuaciones en derivadas parciales. Dentro de sus muchas aplicaciones, nos garantiza la existencia y unicidad de solución para ecuaciones elípticas, y en menor medida, parabólicas. En combinación con el Método de los Elementos Finitos, podemos no sólo asegurar la existencia de dicha solución, sino también dar una aproximación explícita de la misma.

En este trabajo analizamos una ecuación diferencial particular: la ecuación de Poisson con condición de Dirichlet en la frontera. De esta forma mostramos una de las aplicaciones particulares del Teorema de Lax Milgram al Método de Elementos Finitos.

Cabe destacar que tanto el teorema como el método se utilizan en diversas áreas de la ciencia, como ingeniería, geología, física y biología. Por ejemplo, el MET es utilizado para estimar parámetros desconocidos que aparecen en modelos no lineales de reacción-difusión de invasión del cáncer [14].

Bibliografía

- [1] REUBEN HERSH, *Peter Lax, Mathematician: An Illustrated Memoir*, American Mathematical Society, Estados Unidos, Rhode Island, 2015.
- [2] MICHAEL GHIL, *Peter D. Lax: A life in Mathematics*, Ecole Normale Supérieure, Paris, y University of California, Los Angeles.
- [3] MARTIN RAUSSEN y CHRISTIAN SKAU, *Interview with Peter D. Lax*, American Mathematical Society. Abstracts of Papers Presented, Volume 3, 2006.
- [4] FERNANDO BOMBAL, *Análisis Funcional: Una Perspectiva Histórica*, Proceedings of the Seminar of Mathematical Analysis, Secretariado de Publicaciones Universidad de Sevilla, 2003.
- [5] LAWRENCE C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, Rhode Island, 2010.
- [6] PRUDHOMEE, SERGE y COTTEREAU, RÉGIS, *An Introduction to the Finite Element Method*, Lecture Notes, École Polytechnique de Montréal, 2016.
- [7] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [8] *The Finite Element Method and Lax-Milgram's Theorem* [en línea][fecha de acceso 9/9/2017] URL disponible en: http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DN2250/tilnum2-07/tnm_fem.pdf
- [9] W. RUDIN *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.
- [10] JOHN B. CONWAY *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1985.

-
- [11] JUAN GALVIS y HENRIQUE VERSIEUX *Introdução à Aproximação Numérica de Equações Diferenciais Parciais Via o Método de Elementos Finitos*, 28o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.
- [12] SUSANNE C. BRENNER L. RIDGWAY SCOTT *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 2008.
- [13] JOSÉ MANUEL CUBO PÉREZ *Aplicación del Análisis por Elementos Finitos en la Ingeniería Naval*, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Naval, Abril 2010.
- [14] A.A.I. QUIROGA, D.R. Fernández, G.A. Torres y C.V. Turner *Adjoint method for a tumor invasion PDE-constrained optimization problem using FEM*, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, CIEM-CONICET, 2015.
- [15] PETER D. LAX y Arthur N. Milgram *Parabolic Equations*, in Contributions to the theory of partial differential equations, Annals of Mathematics Studies, no. 33, pages 167–190. Princeton University.
-