El teorema de Lax-Milgram y su aplicación al método de elementos finitos

Concurso de monografías de la UMA 2017

En homenaje a la memoria de María Amelia Muschietti

Luis Agustin Cardenas Pena

Agradecimientos: a los Drs. Claudio Padra y Enzo Dari por todas las dudas que me ha resuelto sobre el método de elementos finitos, y la bibliografía que me han facilitado.

30 de septiembre de 2017

Versión revisada el 1 de octubre de 2017

Índice

1. Reseña histórica

La historia de MEF (el método de elementos finitos) es tan rica que es imposible dar cuenta detallada de esta sin extenderse demasiado. Como el foco de esta monografía yace en la relación entre el Teorema de Lax-Milgram y MEF, no nos extendemos demasiado en los detalles históricos de MEF.

Las ideas que fueron la semilla de MEF, pueden remontarse hasta los trabajos de aproximaciones numéricas de Euler, dependiendo de cuan amplia sea la interpretación sobre cuales son las ideas en las que se basa MEF.

En la antigüedad, los griegos usaron el método de exhaución para calcular áreas y volúmenes. En el siglo XVII con la creación del cálculo infinitesimal, de parte de Newton y Leibniz, se llevo al límite este proceso. Durante el siglo XX, hubo una nueva revolución en el campo del análisis numérico. El advenimiento de las computadoras digitales posibilitó la realización de cálculos de complejidad sin precedentes. Con esto, problemas previamente intratables, quedaron dentro del alcance del análisis numérico asistido por computadora.

En lugar de resolver un problema en forma exacta, el análisis numérico aproxima la solución del problema. El análisis numérico suele emplearse en casos en los cuales el problema exacto es intratable mediante métodos analíticos. Por esta razón MEF representa, en cierto modo, un regreso al método de exhaución de los griegos en el siguiente sentido: se reconoce que se puede obtener una solución aproximada de un problema, con un error dentro de margen de tolerancia fijado, dividiendo al dominio en trozos de longitud finita en lugar de tener que recurrir a los infinitesimales de Newton. Es decir, si bien el proceso puede tender al límite en un sentido potencial, sólo se obtiene una aproximación *suficientemente* cerca de la original, donde *suficientemente* se interpreta de acuerdo al margen de tolerancia deseado.

El método de elementos finitos es intrínseco al análisis numérico moderno, por análisis numérico moderno entendemos al análisis numérico enfocado en algoritmos ejecutados por computadoras. En concordancia con esta idea, si bien no se puede atribuir a una persona la invención de algo tan amplio como MEF, consideramos que el momento en el que nació fue cuando se implementó por primera vez en computadoras digitales.

Debido a esto, si bien su desarrollo se nutrió de la investigación llevada a cabo en círculos académicos, consideramos que MEF surgió en el ambiente de la ingeniería dado que los ingenieros fueron los primeros que tuvieron a su disposición las costosas computadoras digitales de la década de 1950 y por ende, los primeros en poderlas emplear para cálculos científicos, descubriendo así que iban a tener un rol central en el campo del análisis numérico.

En la década de 1950, pocas industrias podían solventar los costos de las computadoras digitales. Entre éstas estaban los servicios de defensa de Estados Unidos y las empresas aeronáuticas. Lo que conocemos como MEF comenzó a usarse en el ámbito de la ingeniería aeronáutica donde el ingeniero M. Jonathan Turner, consiguió que Boeing invierta los recursos necesarios para implementar MEF y, por consiguiente, que su equipo de ingeniería se dedique a investigar dicho método.

El nombre 'método de elementos finitos' fue acuñado por Ray. W. Clough, un ingeniero que colaboró con Jonathan Turner durante el verano de 1952 en el marco del Boeing Summer Faculty Program. Clough implementó MEF en otras áreas de la ingeniería distintas a las áreas en las que Turner lo había aplicado, y a la hora de publicarlo *direct stiffness method* no era el nombre adecuado ([W. Clough, 1990]). En cambio, *finite element method* (como se llama en inglés) es un nombre descriptivo en contextos mucho más amplios.

El uso del método se extendió a otros ámbitos dentro de la ingeniería, y se logró implementar satisfactoriamente en una familia de problemas cada vez más amplia. A pesar de esto, habían grandes dificultades teóricas, ya que dada la naturaleza inmediatamente aplicada que tenía el desarrollo de MEF, su aplicación a distintas ecuaciones sólo se podía validar precariamente, implementando la formulación del método al problema de contorno en el cual se deseaba aplicarlo y probando la implementación con una versión simple del problema para la cual se dispongan soluciones exactas. Es decir, en un problema modelo como lo puede ser el problema de Dirichlet con un dominio rectangular o circular, cuya geometría dista mucho de ser tan compleja como las geometrías que surgen en aplicaciones industriales. Otra forma de comprobar la eficiencia del método era comparar su resultado con algún otro algoritmo que se tenga para el mismo problema. Esto no siempre era posible ya que en algunos casos, MEF era el único algoritmo que se conocía que podía aproximar bien el problema, de hecho son estos problemas para los cuales no existía ningún algoritmo adecuado los que motivaron el desarrollo del MEF.

Si bien los métodos numéricos siempre han de validarse comparando sus resultados con datos experimentales, aunque el planteo matemático sea perfecto e impoluto siempre pueden fallar las suposiciones que se hicieron para plantear el modelo a aproximar. Evidentemente no es para nada deseable que esta sea la única forma de validarlo. Esto es lo que dio lugar a una fuerte necesidad de una teoría matemática que sustente la validez de MEF, la cual derivó en la promoción de MEF en los ámbitos académicos. Además, el desarrollo de MEF en el ámbito académico, no sólo logro darle sustento a los métodos ya creados, sino que creo un rico ambiente en el que empezaron a germinar nuevas variantes del método, ampliando cada vez más su rango de aplicaciones.

La teoría matemática sobre la cual se basan los textos modernos de elementos finitos surgió de la teoría de distribuciones de Schwarz y se desarrolló paralelamente a MEF hasta que hacia fines de la década de 1960 quedaron unidas de forma inseparable.

En el año 1968 se empezó a desarrollar la teoría matemática sobre MEF y se publicaron varios artículos académicos sobre éste. Uno de estos artículos académicos ([ZLÁMAL, 1968]) despertó fuertemente el interés de la comunidad de matemática de análisis numérico, y muchos buenos matemáticos se incorporaron al esfuerzo de desarrollar una teoría para MEF. Hacia 1972, MEF se había convertido en un área importante del análisis numérico en las matemáticas aplicadas. Se hacían conferencias con regularidad y comenzó a surgir literatura en los aspectos matemáticos de MEF aplicados a problemas elípticos, problemas de autovalores y problemas parabólicos.

Además del marco teórico dado por la teoría de los espacios de Sobolev y la teoría de distribuciones de Schwarz sobre la cual se basa la teoría de espacios de Sobolev, algunos resultados matemáticos muy importantes para MEF son el Teorema de Lax-Milgram, una generalización del Teorema de Lax-Milgram y el lema de Cea ([Céa, 1964]). Este último tiene como hipótesis las mismas que el Teorema de Lax-Milgram, y si éstas se cumplen entonces para aproximar la solución del problema variacional original sólo se necesita aproximar correctamente el espacio en el cual ésta se encuentra.

El Teorema de Lax-Milgram fue enunciado por primera vez en un paper de Peter Lax y Arthur Milgram en ([Peter Lax, 1954]), aunque no se aplicó de inmediato a MEF dado que este se encontraba en etapas tempranas de su desarrollo.

Una generalización del Teorema de Lax-Milgram que se incluye en éste trabajo fue descubierta por Nečas en ([Nečas, 1962]) y popularizada en la comunidad de elementos finitos por Ivo Babuška en ([Babuška, 1971]).

2. Prerrequisitos matemáticos

En esta monografía se asume la familiaridad del lector con la teoría elemental de conjuntos y el álgebra lineal en espacios de dimensión finita. Se recomienda al lector estar familiarizado con la topología general, las nociones sobre topología empleadas en esta monografía son las que se hallan en el libro ([Munkres, 2000]). De todas formas, con el fin de fijar notación y facilitar las referencias dentro del texto han definido todas las nociones topológicas empleadas, restringidas al marco de los espacios normados.

2.1. Elementos de álgebra lineal

Se asume que el lector está bien preparado en álgebra lineal, la exposición tiene como fin fijar notación y dejar en claro cuales son las definiciones que se están empleando.
Dado un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, llamaremos norma a toda función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

1. $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \forall\, v \in V$
2. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall\, v, w \in V$
3. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Dado un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, se llama producto interno a toda función $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que

1. Es lineal en la primera coordenada, es decir:

   a) $\langle u + v, w \rangle_V = \langle u, w \rangle_V + \langle v, w \rangle_V \qquad \forall\, u, v, w \in V$

   b) $\langle \lambda v, w \rangle_V = \lambda \langle v, w \rangle_V \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, v, w \in V$

2. Es simétrica, es decir:
   $\langle u, v \rangle_V = \langle v, u \rangle_V \qquad \forall\, u, v \in V$
3. $\langle u, v \rangle_V > 0$ si $v \neq 0$

Observación 2.1.1. De la linealidad en la primera coordenada y la simetría se puede deducir que es lineal en ambas coordenadas.

Dado un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ se tiene que

$$\|v\| = \langle v, v \rangle_V^{1/2}$$

es una norma.

Definición 2.1.1. Dado un espacio vectorial V y una norma $\|\cdot\|_V :\to \mathbb{R}$ se llama espacio normado al par $(V, \|\cdot\|_V)$.

Definición 2.1.2. Dado un espacio vectorial V y un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}$ se llama espacio de producto interno al par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$. A todo espacio con producto interno se lo considera espacio normado con la norma inducida por su producto interno.

2.2. Nociones topológicas y métricas

En esta sección se exponen conceptos topológicos simplificados para el caso de espacios normados.

Definición 2.2.1. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$, se llama bola abierta de centro x y radio r al conjunto

$$B(x,r) = \{v \in V \;/\; \|v - x\|_V < r\}.$$

Definición 2.2.2. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$, se llama bola cerrada de centro x y radio r al conjunto

$$\overline{B}(x,r) = \{v \in V \;/\; \|v - x\|_V \leq r\}.$$

Definición 2.2.3. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$, se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ converge en V si existe $x \in V$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_V = 0,$$

en este caso se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente.

Notación: la expresión $x_n \to x$ nota que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Definición 2.2.4. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$, se dice que un subconjunto A de V es abierto si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x,\varepsilon) \subset A.$$

Definición 2.2.5. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$, se dice que un subconjunto B de V es cerrado si para toda sucesión convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ con $x_n \to x$ se tiene $x \in B$.

Definición 2.2.6. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$ y subconjunto A de V se llama *interior de* A al conjunto

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A \;/\; \text{existe } \varepsilon > 0 \text{ con } B(x,\varepsilon) \subset A\}.$$

El interior del conjunto A siempre es un conjunto abierto. De hecho, es el mayor conjunto abierto con respecto a la inclusión que está contenido en A. Es decir, si U es un conjunto abierto tal que $U \subset A$ entonces $U \subset \overset{\circ}{A}$.

Definición 2.2.7. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$ y subconjunto A de V se llama *clausura de* A al conjunto

$$\overline{A} = \left\{ x \in A / \inf_{v\in A} \|x - v\|_V = 0 \right\}.$$

La clausura del conjunto A siempre es un conjunto cerrado, en particular, es el menor conjunto cerrado que contiene a A. Es decir, si C es un conjunto cerrado tal que $A \subset C$ entonces $\overline{A} \subset C$.

Definición 2.2.8. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$ y conjunto $S \subset V$, se dice que S es denso en V si $\overline{S} = V$.

Definición 2.2.9. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$ se llama topología de V al conjunto

$$\{A \subset V / A \text{ es abierto }\}.$$

Además, si el conjunto de abiertos de $(V, \|\cdot\|_1)$ y el de $(V, \|\cdot\|_2)$ coinciden, se dice que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son topológicamente equivalentes.

Definición 2.2.10. Dado un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$, se llama sucesión de Cauchy a una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ que cumple:

$$\forall n, m \geq N : \|x_n - x_m\|_V < \varepsilon.$$

Proposición 2.2.1. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Definición 2.2.11. Si toda sucesión de Cauchy en un espacio normado tiene límite, se dice que este espacio normado es completo. Se llama espacio de Banach a todo espacio normado completo, y espacio de Hilbert a todo espacio de producto interno completo como espacio normado con la norma inducida por el producto interno.

Definición 2.2.12. Dado un espacio vectorial V y dos normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c_2\|v\|_2 \qquad \forall v \in V,$$

se dice que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Se puede demostrar fácilmente que la relación '$\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$' es una relación de equivalencia.

Proposición 2.2.2. *Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes, entonces los espacios normados $(V, \|\cdot\|_1)$ y $(V, \|\cdot\|_2)$ son topológicamente equivalentes.*

En el resto de la monografía al espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$ se lo nota V, haciendo omisión de la norma. Las normas se notan $\|\cdot\|$ cuando no hay lugar a confusión, en caso de emplearse más de una norma se las diferencia empleando distintos subíndices.

Definición 2.2.13. Dados dos espacios de Banach, si existe un operador lineal $A : V \to W$ inyectivo tal que

$$\|Au\|_W = \|u\|_V \quad \forall\, v \in V.$$

se dice que V esta isométricamente inmerso en W. Si $Im(A) = W$ se dice que V y W son isomorfos como espacios de Banach. Si, además, uno de estos dos espacios es un espacio de Hilbert, se dice que son isomorfos como espacios de Hilbert.

Teorema 2.2.3 (Completación de espacio normado)**.** *Dado un espacio normado V, existe un espacio de Banach W tal que V está isométricamente inmerso en W.*

Definición 2.2.14. Sea V un espacio normado. Dado $C \subset V$, se dice que C es de primera categoría si existe una familia de conjuntos $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \ ,$$

y además $\overset{\circ}{D}_n = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si C no es de primera categoría, se dice que C es de segunda categoría.

Proposición 2.2.4. *Dado un espacio de Banach V, se tiene que el conjunto V es de segunda categoría.*

Definición 2.2.15. Dado un espacio de Banach V y $A, B \subset V$ subespacios de este, la suma entre A y B es el conjunto

$$A + B = \{v \in V : \exists x \in A, \exists y \in B / v = x + y\} \ .$$

Si además $A \cap B = \{0\}$ a la suma $A + B$ se la conoce como suma directa de A y B y se la denota $A \oplus B$.

2.3. Elementos de análisis funcional

Esta sección contiene los elementos de análisis funcional empleados en la monografia. Si se desea leer las demostraciones se recomienda consultar algún texto de análisis funcional como por ejemplo ([Bachman and Narici, 1966]), ([Brezis, 2010]) o ([Rudin, 1991]).

Definición 2.3.1. Dados dos espacios normados V, W y un operador lineal $A : V \to W$ se dice que A es continuo si para toda sucesión convergente $x_n \to x$ se tiene

$$Ax_n \to Ax,$$

donde la convergencia está dada en la norma del espacio W.

Definición 2.3.2. Dados dos espacios normados V y W, un subespacio D de V y un operador lineal $A : D \to W$, se dice que el operador A es cerrado si para toda sucesión $x_n \to x\,\acute{}$, con $Ax_n \to y$ para algún $y \in W$, se tiene que $Ax_n \to Ax$.

Se puede demostrar que A es cerrado si y sólo si el gráfico de A es cerrado en el espacio normado producto $V \times W$ con la topología producto.

Proposición 2.3.1. *Dado un operador $A : V \to W$ continuo, éste es cerrado como operador de $V \to W$.*

Definición 2.3.3. Dados dos espacios normados V, W y un operador lineal $A : V \to W$ se dice que A es acotado si

$$\sup_{x\in V} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} < \infty.$$

Donde, cometiendo un pequeño abuso de notación se toma el supremo sobre los $x \neq 0$ ya que la división por cero la cual no esta definida.

Un operador lineal es acotado si y sólo si es continuo. La razón por la cual existen estas dos denominaciones es que la equivalencia no se cumple en el caso de los operadores no lineales, donde un operador puede ser continuo pero no estar acotado.

Definición 2.3.4. El conjunto de los operadores lineales acotados de V en W se lo llama $\mathcal{L}(V, W)$. Este es un espacio vectorial, y se lo equipa con la siguiente norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \sup_{x \in V} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V}.$$

Proposición 2.3.2 (Caracterizaciones de la norma)**.** *Dados dos espacios normados V, W y un operador lineal $A : V \to W$ se tiene*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \sup_{x \in V} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V}.$$

Proposición 2.3.3. *Dado un espacio normado V y $v \in V$ se tiene*

$$\|v\|_V = \sup_{f \in V'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{V'}}.$$

Definición 2.3.5. Dado un espacio normado V y $\mathbb{R}$ que es espacio normado con la norma $\|x\|_{\mathbb{R}} = |x|$ se llama *espacio dual* de V al espacio normado $V' := \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. A los elementos de V' se los llama funcionales lineales de V.

El espacio dual de V siempre es un espacio normado con la suma y el producto puntual de funciones, más aun:

Proposición 2.3.4. *Dado un espacio normado V, su espacio dual V' es un espacio de Banach. Así mismo, si V es un espacio de producto interno, V' es un espacio de Hilbert.*

Proposición 2.3.5. *Dado un espacio normado V, existe un monomorfismo de espacios normados $\Gamma : V \to V''$, el cual está dado por*

$$f(v) = \langle f, v \rangle_{V',V} = \langle \Gamma v, f \rangle_{V'',V'} \qquad \forall f \in V'.$$

Definición 2.3.6. Si el operador Γ del enunciado anterior es biyectivo, entonces se dice que el espacio V es reflexivo.

Teorema 2.3.6 (De representación de Riesz para espacios de Hilbert)**.** *Dado un espacio de Hilbert V, se tiene que V es isomorfo como espacio de Hilbert a V' por el isomorfismo canónico $R : V \to V'$ que envía a $u \to R(u)$ dado por*

$$\langle u, v \rangle_V = \langle R(u), v \rangle_{V',V} \qquad \forall v \in V,$$

es decir, la imagen por R de u es el funcional lineal dado por $f_u(v) = \langle u, v \rangle_V$. Además, se tiene que $\|R\|_{\mathcal{L}(V,V')} = \|R^{-1}\|_{\mathcal{L}(V',V)} = 1$.

Corolario 2.3.7. *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Dado un operador lineal $A : V \to W$ donde V y W son espacios normados, y un funcional lineal $f \in W'$ se tiene que

$$f \circ A : V \to \mathbb{R},$$

es un funcional lineal en V'. En vistas de este hecho, se define

Definición 2.3.7 (Operador traspuesto)**.** Dado un operador lineal $A : V \to W$ donde V y W son espacios normados, se llama *operador traspuesto* de A y se denota A^T al operador $A^T : W' \to V'$ dado por la asignación

$$A^T f = f \circ A.$$

Con la notación que empleada en el capítulo 4 esto es

$$\left\langle A^T f, v\right\rangle_{V',V} = \langle f, Av\rangle_{W',W}.$$

Esta función es un operador lineal acotado, más aun se puede demostrar que

$$\|A^T\|_{\mathcal{L}(W',V')} = \|A\|_{\mathcal{L}(V,W)}.$$

Definición 2.3.8. Dado un espacio normado V y un subconjunto $C \subset V$ se llama anulador de C al subconjunto

$$C^\circ = \{f \in V'/f(v) = 0 \quad \forall\, v \in C\}.$$

Definición 2.3.9. Con la misma notación que la definición anterior definimos: dado un espacio normado V y un subconjunto $C \subset V'$ se llama anulador de C al subconjunto

$$C^\circ = \{v \in V/f(v) = 0 \quad \forall\, f \in C\}.$$

Este abuso de notación no es grave. En un espacio V que no sea dual de ninguno, la notación sólo puede interpretarse de acuerdo a la primera definición. En un espacio dual V', siempre interpretamos la notación de acuerdo a la segunda definición.

Proposición 2.3.8. *Dado un espacio normado V y un subconjunto C de V, si $C^\circ = \{0\}$ entonces C es denso en V.*

De forma similar, dado un espacio dual V' y un subconjunto C de V', si $C^\circ = \{0\}$ entonces C es denso en V'.

Cuando se estudian operadores lineales entre espacios de dimensión finita, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema. *Dados dos espacios normados V y W, ambos de dimensión finita, y $A : V \to W$, se cumplen las siguientes igualdades*

1. $Ker(A) = (Im(A^T))^\circ$

2. $Ker(A^T) = (Im(A))^\circ$

3. $Im(A) = (Ker(A^T))^\circ$

4. $Im(A^T) = (Ker(A))^\circ$

La demostración estándar del último ítem consiste en demostrar que $Im(A) \subset (Ker(A^T))^\circ$, y después emplear el teorema de la dimensión para concluir que como $dim(Im(A)) = dim((Ker(A^T))^\circ)$ ha de ser $Im(A) = (Ker(A^T))^\circ$.

En el caso de espacios normados de dimensión infinita, esta última propiedad no siempre se cumple, el mejor resultado posible es el siguiente:

Teorema 2.3.9. *Dados dos espacios vectoriales V y W de dimensión finita y $A : V \to W$, se cumplen las siguientes igualdades*

1. $Ker(A) = (Im(A^T))^\circ$

2. $Ker(A^T) = (Im(A))^\circ$

3. $\overline{Im(A)} = (Ker(A^T))^\circ$

4. $\overline{Im(A^T)} \subset (Ker(A))^\circ$

A continuación se enuncia un teorema importante del análisis funcional sirve para compensar esta falencia y tener un criterio para saber cuando $\overline{Im(A)} = (Ker(A^T))^\circ$. Este teorema sirve para generalizar muchos resultados, que valen en espacios de dimensión finita, al contexto de dimensión infinita siempre y cuando se cumpla alguna de las hipótesis de la equivalencia.

Teorema 2.3.10 (Teorema del rango cerrado)**.** *Sean V y W espacios de Banach. Dado $A \in \mathcal{L}(V, W)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$Im(A)$ es cerrado.*

2. *$Im(A^T)$ es cerrado.*

3. $Im(A) = (Ker(A^T))^\circ$.

4. $Im(A^T) = (Ker(A))^\circ$.

5. *Existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\forall\, w \in Im(A), \exists v_w \in V,\ Av_w = w \ y\ \alpha\|v_w\|_V \leq \|w\|_W.$$

6. *Existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\forall\, v' \in Im(A^T), \exists w_{v'} \in W',\ A^T w_{v'} = v' \ y\ \alpha\|w_{v'}\|_{W'} \leq \|v'\|_{V'}.$$

A continuación, se enuncian cuatro teoremas del análisis funcional los cuales son relevantes para este trabajo y que están fuertemente relacionados entre sí. El teorema de la inversa acotada y el teorema de Banach-Schauder tienen tanto en común con el teorema de la inversa acotada que a veces se consideran reformulaciones del teorema del rango cerrado.

Estos cuatro teoremas son los cimientos sobre los cuales se construye la generalización del Teorema de Lax-Milgram llamada Teorema BNB en esta monografía.

Teorema 2.3.11 (Teorema de la inversa acotada). *Dado un espacio de Banach V, un espacio normado W y un subespacio E de V, se tiene que si $A : E \to W$ es operador cerrado y el rango de A, $A(E)$ es de segunda categoría entonces*

1. *A es sobreyectivo, es decir $A(E) = W$.*
2. *Existe $m > 0$ tal que para todo $w \in W$ existe algún $v \in E$ con $Av = w$ y $\|v\|_V \leq m\|w\|_W$.*
3. *Si A^{-1} existe, entonces es continuo.*

Teorema 2.3.12 (Banach-Schauder). *Si $A \in \mathcal{L}(V, W)$ es sobreyectivo y U es un conjunto abierto de V, entonces $A(U)$ es un conjunto abierto de W.*

Por último, se enuncian dos teoremas los cuales, junto con el grupo de teoremas anterior en el cual está el teorema de la inversa acotada, conforman los pilares fundamentales del análisis funcional.

Teorema 2.3.13 (Hahn-Banach). *Sea V un espacio vectorial y M un subespacio de V, si existen $p : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que*

$$\begin{aligned} p(v + w) \leq p(v) + p(w) \quad \forall v, w \in V, \\ p(tv) = tp(v) \quad \forall v \in V, t \geq \mathbb{R}, \end{aligned}$$

y $f : M \to \mathbb{R}$ lineal con $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$, entonces existe $F : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(v) = f(v) \quad \forall v \in V$$

y

$$-p(-v) \leq F(v) \leq p(v) \qquad \forall x \in M$$

Si un funcional p cumple las propiedades del enunciado se lo llama funcional sublineal. Toda norma es un funcional sublineal.

En el contexto de espacios normados, el Teorema de Hahn-Banach permite extender funcionales lineales continuos definidos en un subespacio del V hacía todo el espacio sin que estos dejen de ser acotados, en virtud de que la norma es un funcional sublineal.

Corolario 2.3.14. *Dado un espacio normado V y un subespacio $M \subset V$, si $f \in M'$ existe $F \in V'$ tal que*

$$\|f\|_{M'} = \|F\|_{V'} \quad y \quad f(v) = F(v) \quad \forall\, v \in M.$$

Teorema 2.3.15 (Banach-Steinhaus). *Sean X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Dados I un conjunto de índices de cardinalidad arbitraria y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un subconjunto de $\mathcal{L}(X,Y)$, se tiene que si $\sup_{\alpha\in I}\|A_\alpha x\| < \infty$ para todo $x \in X$ entonces $\sup_{\alpha\in I}\|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$.*

Algunas propiedades exclusivas de espacios de Hilbert

En el contexto de espacios de Hilbert V, el complemento ortogonal se define de la misma forma que se define en espacios de producto interno de dimensión finita.

Definición 2.3.10. Dado un espacio de Hilbert H, y un subconjunto C de V se llama *complemento ortogonal* de A al conjunto

$$C^{\perp} = \{v \in H / \langle v, w\rangle_V = 0 \quad \forall w \in C\}$$

Teorema 2.3.16. *Dado un espacio de Hilbert H, se tiene que si existe un subespacio S de H el cual es cerrado como conjunto, y además $S^{\perp} = \{0\}$, entonces $S = H$.*

Éste teorema se debe al hecho de que $S^{\perp} = \{0\} \iff \overline{S} = H$. Es decir, S es denso en H si y sólo si $S^{\perp} = \{0\}$.

Proposición 2.3.17. *Dado un espacio de Hilbert H y un subespacio S de H, si S es cerrado se tiene*

$$H = S \oplus S^{\perp}$$

Proposición 2.3.18. *Sea H un espacio de Hilbert y S un subespacio cerrado de H. Entonces existe una función $\pi_S : V \to S$ tal que $\pi_S v = v$ para todo $v \in S$ y además $Ker(\pi_S) = S^{\perp}$.*

Definición 2.3.11. A la función del enunciado anterior se la conoce como proyección ortogonal de H sobre S respecto del producto interno de $(\cdot,\cdot)_H$.

3. Descripción del método de elementos finitos

3.1. Una descripción informal del método

El método de elementos finitos es un método numérico para resolver una ecuación diferencial el cual consiste en los siguientes pasos:

1. Primero se busca una forma variacional de la ecuación diferencial. Para demostrar que el problema está bien planteado, es decir que para cualquier dato en cierto espacio tiene una única solución, y la solución depende continuamente del dato, se emplea el Teorema de Lax-Milgram o alguna de sus generalizaciones. Esta parte en la cual hacemos hincapié en esta monografía. Esta formulación variacional suele codificarse en una forma bilineal $a(\cdot, \cdot) : V \times W \to \mathbb{R}$ y un funcional lineal $f \in W'$ el cual codifica datos como pueden ser condiciones de contorno.

2. Luego se particiona el dominio en pequeñas subregiones, esto se realiza empleando un algoritmo generador de mallas. En 1D son intervalos, en 2D suele elegirse triángulos o cuadriláteros, en 3D suelen emplearse tetraedos o paralelepípedos.

3. Una vez particionado el dominio, se lleva a cabo la discretización del problema variacional. Se elije un subespacio W, tomando de base a un conjunto de funciones cuyos soportes son unas pocas subregiones adyacentes. Una vez elegidas, para obtener el problema matricial se evalúa el problema variacional con la forma bilineal a restringida al espacio de funciones generado por las funciones base, y lo mismo se hace con el funcional lineal f.

4. Se resuelve el problema matricial empleando algún algoritmo iterativo que sea eficiente para matrices ralas, y luego se guarda la solución y se la puede graficar para analizarla.

Algunos comentarios:

• Cuando se lleva a cabo el ítem 3, las funciones se suelen elegir de forma que se respeten las condiciones de contorno y sean continuas en los bordes de las subregiones, pero esto no es estrictamente necesario. Para algunos problemas basta con imponer que la componente normal a lo largo del borde de las regiones sea continua. Dependiendo del tipo de problema y de las condiciones que se quieran emplear, pueden elegirse elementos del tipo nodal, en cuyo caso los grados de libertad dependen de la cantidad de nodos de la malla, o del tipo 'edge' en los cuales los grados de libertad dependen de la cantidad de aristas (2D) o caras (3D) que tengan las subregiones.

• Se puede elegir las funciones base fuera del espacio W, en cuyo caso el algoritmo se denomina método de elementos finitos no conforme. Estos métodos no se abordan en esta monografía, ya que escapan del campo de aplicación directa del Teorema de Lax-Milgram.

• Hay variaciones del método, como los elementos finitos adaptivos donde el algoritmo llevas más pasos, pero esta monografía no abarca métodos adaptivos.

3.2. Aproximación formal a la solución del problema variacional

La formulación variacional de una ecuación diferencial usada en el método de elementos finitos se codifica de la siguiente manera.

Dados dos espacios de Banach V, W y una forma bilineal $a : V \times W \to \mathbb{R}$ y un funcional lineal $f \in W'$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} &\textit{Hallar } v \in V \text{ tal que} \\ &a(u, w) = f(w) \quad \forall w \in W. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

El método de elementos finitos[1] consiste en hallar dos familias de subespacios

$$\begin{aligned} &\{V_h\}_h \text{ con } V_h \subset V, \\ &\{W_h\}_h \text{ con } W_h \subset W, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

empleando el método descripto anteriormente, y resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\textit{Hallar } v_h \in V_h \text{ tal que} \\ &a(v_h, w_h) = f(w_h) \quad \forall w_h \in W_h. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Se busca que u_h sea una aproximación de u en norma $\|\cdot\|_V$, es decir

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_V = 0. \tag{3.2.4}$$

El parámetro h denota al *grosor* de la malla, que es el supremo del diámetro de todas las subregiones en la cuales esta particionado el dominio. Los espacios V_h y W_h se llaman espacios solución y espacio de funciones test respectivamente.

En la mayoría de las aplicaciones se tiene $V = W$ y V un espacio de Hilbert, por lo que se suele tomar $V_h = W_h$.

Dado que para cada h se tiene que tanto V_h como W_h son espacios de dimensión finita, tras elegir una base de estos espacios, este problema de álgebra lineal convierte en un problema matricial, el cual se resuelve mediante métodos numéricos matriciales.

Cuando se cumplen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, el lema de Céa da cotas quasi óptimas del error (óptimas salvo una constante multiplicativa), lo que asegura que se cumple (3.2.4) si se aproximan adecuadamente los espacios V y W mediante V_h y W_h.

Con las generalizaciones del Teorema de Lax-Milgram la situación no es tan óptima y para tener una convergencia como la de (3.2.4), y se necesitan condiciones adicionales. Esto escapa al tema de la monografía, y por una cuestión de extensión no se entra en detalles, pero se han dejado referencias bibliográficas suficientes para el lector interesado.

[1] En realidad hay métodos en los cuales en espacio aproximantes no es un subespacio del original, esos métodos se conocen como métodos no conformes pero exceden el alcance de este trabajo.

4. Teorema de Lax-Milgram y su relevancia en el método de elementos finitos

4.1. El Teorema de Lax-Milgram

En esta sección se ilustra la importancia del Teorema de Lax-Milgram clásico tanto para la formulación variacional del problema como para su resolución mediante el método de elementos finitos.

Definición 4.1.1. Dada una forma bilineal $a : (u, v) : V \times V \to \mathbb{R}$, esta se dice V-elíptica si existe $\alpha > 0$ tal que para todo $v \in V$ se tiene

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \tag{4.1.1}$$

Proposición 4.1.1. *Si $a : V \times W \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal continua, entonces existe un operador $A \in \mathcal{L}(V, W')$ que verifica*

$$\langle Av, w \rangle_{W',W} = a(v, w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

donde $\langle Av, w \rangle_{W',W}$ denota[2] *la evaluación del función $Av \in W'$ en el elemento $w \in W$.*

Demostración.

La demostración es un simple ejercicio. Empleando la linealidad en la segunda coordenada de $a(\cdot, \cdot)$ se demuestra que Av es un funcional lineal para cada $v \in V$. Luego empleando la linealidad en la primera coordenada de $a(\cdot, \cdot)$ se demuestra que A es un operador lineal. Además, como $a(\cdot, \cdot)$ es continuo se tiene que existe $c > 0$ con

$$\langle Av, w \rangle_{W',W} = a(u, v) \leq c\|v\|_V \, \|w\|_W \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Dividiendo la ecuación por $\|w\|_W$ se puede observar que cada funcional lineal Av es continuo por estar acotado por $c\|v\|_V$.

$$\frac{\langle Av, w \rangle_{W',W}}{\|w\|_W} \leq c\|v\|_V \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Tomando el supremo sobre los $w \in W$ se obtiene

$$\|Av\|_{W'} \leq c\|v\|_V.$$

Finalmente, se toma el supremo sobre $v \in W$ y se obtiene

$$\|A\|_{\mathcal{L}(V,W')} \leq c.$$

■

[2] Esta notación es similar a la del producto interno, ya que el producto interno $\langle v, v \rangle_V$ puede pensarse como un producto de dualidad $\langle R(v), v \rangle_{V',V}$ empleando el Teorema de representación de Riesz.

La demostración del Teorema de Lax-Milgram que suele darse en los libros de texto está basada en el Teorema del punto fijo de Banach. Si bien es un buen ejemplo[3] para ilustrar el poder del Teorema del punto fijo de Banach, se decidió dar una demostración más cercana a la que fue publicada originalmente en el paper de Peter Lax y Arthur Milgram, porque esta ilustra mejor la idea de que ambos espacios son isomorfos como espacios de Banach.

Teorema 4.1.2. *Sea V un espacio de Hilbert. Sean $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y V-elíptica y $f : V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo.*

El siguiente problema variacional tiene solución:

$$\begin{aligned} &\textit{Hallar un elemento } u \in V \textit{ tal que} \\ &\forall v \in V : a(u,v) = f(v) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Demostración.

Sea $A \in \mathcal{L}(V, W')$ el operador lineal asociado a $a(\cdot,\cdot)$.

Llámese $f_u = Au$. Por ser a V-elíptica se tiene

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = f_u(u) \leq \|f_u\|_{V'}\,\|u\|_V = \|Au\|_{V'}\,\|u\|_V$$

por lo que $\alpha\|u\|_V \leq \|Au\|_{V'}$ y A está acotado inferiormente. Esto implica que A es inyectivo, ya que por ser operador lineal es inyectivo si y sólo sí $Nu(A) = \{0\}$ y si $v \in Nu(A)$ se tiene:

$$\alpha\|u\|_V \leq \|Av\|_{V'} = 0\,,$$

lo cual implica $\|u\|_V = 0$ por lo que $u = 0$.

Juntando ambas desigualdades se tiene

$$\alpha\|u\|_V \leq \|Au\|_{V'} \leq M\|u\|_V\,. \tag{4.1.3}$$

Sea $\Phi : V' \to V$ la función inversa de la isometría dada por el Teorema de representación de Riesz. Se tiene que $\Phi \circ A$ es un operador de V a V.
Es fácil comprobar que $\|u\|_A = \|\Phi \circ Au\|_V$ es una norma[4], basta con verificar las propiedades de la norma empleando la linealidad de A.

Las desigualdades (4.1.3) pueden re-escribirse como

$$\alpha\|u\|_V \leq \|u\|_A \leq M\|u\|_V\,. \tag{4.1.4}$$

Esto significa que las normas $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_A$ son equivalentes, con lo cual la imagen de $\Phi \circ A$ es un espacio normado completo, y por ende es un subespacio cerrado de V.

Si se comprueba que $Im(\Phi \circ A)^{\perp} = \{0\}$ entonces quedará demostrado que $Im(\Phi \circ A)$ es cerrado y denso en V y por ende, gracias al teorema (2.3.16), se tiene $Im(\Phi \circ A) = V$.

[3] Por cuestiones de extensión de la monografía el autor tuvo que decidir que versión de la demostración dar en lugar de exponer ambas.

[4] Esto sucede con todo operador inyectivo $B : W_1 \to W_2$ donde W_1, W_2 son espacios de Banach.

Sea $v \in Im(\Phi \circ A)^{\perp}$. Por definición de complemento ortogonal se tiene $\langle v, w\rangle_V = 0$ para todo $w \in V$. Sea $u \in V$ tal que $v = (\Phi \circ A)\,(u)$

$$\forall w \in V: \quad 0 = \langle v, w\rangle_V = \langle(\Phi \circ A)u, w\rangle_V = \langle Au, w\rangle_{V',V}\ , \tag{4.1.5}$$

donde la última igualdad se da por construcción de Φ[5]. (4.1.5) implica que Au es el funcional idénticamente nulo $0 \in V'$, por ende $v = (\Phi \circ A)(u) = 0$, por lo tanto $Im(\Phi \circ A)^{\perp} = \{0\}$.

Finalmente, como Φ es un isomorfismo, se tiene que

$$A(V) = \Phi^{-1}(\Phi(A(V))) = \Phi^{-1}(V) = V'. \tag{4.1.6}$$

■

Corolario 4.1.3. *Dado $f \in V'$ se tiene que existe $u \in V$ tal que $Au = f$ y además*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'}\ , \tag{4.1.7}$$

en otros términos $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V',V)} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Demostración. Se deduce de (4.1.4) como sigue

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|u\|_A = \frac{1}{\alpha}\|\Phi(Au)\|_V = \frac{1}{\alpha}\|Au\|_{V'} = \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'} \tag{4.1.8}$$

■

Este corolario expresa que la solución depende continuamente del dato, lo cual no es sorprendente ya que se tiene un isomorfismo de espacios de Banach entre el espacio solución y el espacio de las funciones dato.

La hipótesis del Teorema de Lax-Milgram de que V sea un espacio de Hilbert es esencial en el siguiente sentido:

Si a V se le pidiese tan sólo que sea un espacio de Banach, el resto de las hipótesis harían que la estructura de espacio normado de V esté inducida por una norma proveniente de un producto interno. En términos más precisos:

Proposición 4.1.4. *Dado un espacio de Banach $(V, \|\cdot\|_V)$ y una forma bilineal V-elíptica $a : V \times V \to \mathbb{R}$ existe un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_A : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que las normas $\|\cdot\|_V$ y $\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_A}$ son equivalentes.*

Demostración. Sea $A : V \to V'$ el operador lineal continuo asociado a $a(\cdot,\cdot)$.

Se comprobara que $\langle v, w\rangle_A = \langle Au, v\rangle_{V',V} + \langle Av, u\rangle_{V',V}$ es un producto interno.

La bilinealidad es una consecuencia directa de la linealidad de A como de $f = Au$ para cada $u \in V$. La simetría es una consecuencia directa de la definición. Lo único que cuesta comprobar es la propiedad (3) del producto interno.

[5]Ver Teorema de Representación de Riesz (2.3.6).

Por la V-elíptica de a y continuidad de a se tiene que

$$2\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u,u) + a(u,u) = (Au)(u) + (Au)(u) = \langle u,u\rangle_A \leq \|A\|_{\mathcal{L}(V,V')}\|u\|_V^2. \quad (4.1.9)$$

Entonces $0 \leq \langle u,u\rangle_A$ para todo $u \in V$ y además $0 = \langle u,u\rangle_A$ si y sólo si $u = 0$, por lo que $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ es un producto interno. Finalmente aplicando raíz cuadrada a la ecuación (4.1.9), se tiene que $\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_A}$ s equivalente a $\|\cdot\|_V$.

■

4.2. Aplicación al método de elementos finitos

De acuerdo con la sección 6, la aproximación por elementos finitos de (4.1.2) es

$$\begin{aligned} &\textit{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ &a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Nota. Lo único que se hizo fue re-escribir (3.2.3) en el caso en el cual $V = W$.

Cuando un problema cumple las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, además de estar bien planteado, se tiene que el problema discreto[6] hereda buenas propiedades del problema continuo.

Teorema 4.2.1 (Céa)**.** *Si se cumplen las condiciones del Teorema de Lax-Milgram y u es solución del problema (4.1.2). Entonces la aproximación (4.2.1) tiene solución única. Más aun, se cumple la siguiente cota:*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v\in V_h} \|u - v\|_V \quad (4.2.2)$$

Demostración. Se puede ver que tiene solución única aplicando el Teorema de Lax-Milgram a la forma bilineal $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ que se obtiene al restringir $a(\cdot,\cdot)$ a $V_h \times V_h$, dado que si

$$\alpha\|v\|_V^2 \leq a(v,v) \quad \forall v \in V \quad (4.2.3)$$

en particular lo es para todo $v \in V_h$, y por ende el problema (4.2.1) cumple las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram con la misma constante α.

Sustrayendo (4.2.1) de (4.1.2) se obtiene[7]

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall\, v_h \in V_h \quad (4.2.4)$$

Luego, empleando la V-elipticidad de la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ se obtiene que, para todo $v \in V_h$ se cumple

$$\begin{aligned} \alpha\|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) \\ &\leq C\,\|u - u_h\|_V\,\|u - v\|_V \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

[6]El problema definido en (3.2.3).

[7]La ecuación (4.2.4) se conoce en la bibliografía como 'ortogonalidad de Galerkin'.

en la segunda igualdad el término $a(u-u_h, v-u_h)$ se anula debido a que $v-u_h \in V_h$ y a (4.2.4). Dividiendo (4.2.5) por $\alpha\|u-u_h\|_V$ se obtiene

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha}\|u-v\|_V \tag{4.2.6}$$

Finalmente el resultado deseado se obtiene tomando el ínfimo sobre todo los $v \in V_h$ y notando que al ser V_h de dimensión finita, el ínfimo se alcanza y por lo tanto es un mínimo. ■

Nota. Haciendo un paralelismo con el análisis matricial, como

$$C = \sup_{v\in V}\frac{\|Av\|_V}{\|v\|_V} \text{ y } \alpha = \inf_{v\in V}\frac{\|Av\|_V}{\|v\|_V} = \sup_{v\in V}\frac{\|A^{-1}v\|_V}{\|v\|_V} \tag{4.2.7}$$

se puede pensar a C/α como un 'número de condición generalizado' en cuyo caso el Teorema de Céa dice que la aproximación de elementos finitos es tan buena como la aproximación del espacio salvo un factor constante que es el numero de condición.

4.3. Generalizaciones del Teorema de Lax-Milgram

El Teorema de Lax-Milgram da condiciones suficientes para que una formulación variacional esté bien planteada, pero estas no son necesarias. Por ejemplo, en problemas de advección-difusión con advección dominante no se cumple la V-elipticidad[8]. Por lo que en algunos casos se requieren alternativas al teorema de Lax-Milgram.

Existen varias generalizaciones al Teorema de Lax-Milgram. En este capítulo se exponen dos. La primera en formularse históricamente se conoce como Teorema de Lions-Lax-Milgram (LLM), la cual fue publicada en ([Lions, 1961]). La segunda en formularse históricamente es el Teorema BNB[9], la gran ventaja de éste sobre el Teorema de Lax-Milgram es que da condiciones necesarias y suficientes para que un problema de cierta familia de problemas este bien planteado.

El problema en el cual se aplica el Teorema LLM es el siguiente:

Sea H un espacio de Hilbert y V un espacio normado. Dada $a : H \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua respecto H, y dado $f \in V'$

$$\begin{aligned}&\text{Hallar } u \in H \text{ tal que}\\ &a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in V.\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Definición 4.3.1. Se dice que el problema (4.3.1) está bien planteado si para cada $f \in V'$ existe un u que es solución del problema con dato f y además existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_H \leq c\|f\|_{V'}\,, \tag{4.3.2}$$

[8]Ver ([Ern and Guermond, 2004]), sección (3.5).

[9]Comunmente se lo conoce como Teorema de Babuška-Lax-Migram. Lo notamos Teorema BNB se debido a que decidimos adherir con el criterio del autor de ([Ern and Guermond, 2004]). La sigla proviene de Banach-Nečas-Babŭska, ya que desde el punto de vista del análisis funcional reformula dos teoremas debidos a Banach, la primera aparición historica del teorema se debe a Nečas y quien lo popularizo en el contexto de elementos finitos fue Babuška

para todo par (f,u) donde u es la solución del problema con dato f.

El problema en el cual se aplica el Teorema BNB es el siguiente:

Sean V un espacio de Banach y W un espacio de Banach reflexivo. Dados una forma bilineal continua $a : V \times W \to \mathbb{R}$ y $f \in W'$

$$\begin{aligned}&\text{Hallar } u \in V \text{ tal que}\\ &a(u,v) = f(w) \quad \forall w \in W.\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Definición 4.3.2. Se dice que el problema (4.3.3) está bien planteado si para cada $f \in W'$ existe un único u solución del problema con dato f y además existe $c > 0$ tal que si u es la solución del problema con dato f se tiene

$$\|u\|_V \leq c\|f\|_{W'}\,. \tag{4.3.4}$$

En la sección anterior, se ve que el problema (4.1.2) descripto en términos de operadores entre espacios de Banach quiere decir que el operador $A : W' \to V$, que codifica el problema variacional, es biyectivo y continuo. La sobreyectividad es equivalente a afirmar que el problema (4.1.2) tiene solución para todo $f \in W'$ y la inyectividad es equivalente a la unicidad de solución cuando esta existe, mientras que la continuidad da una cota del tipo (4.1.7).

Para demostrar un teorema que da condiciones necesarias y suficientes para que (4.3.3) tenga solución única, se emplea una caracterización de los operadores sobreyectivos en espacios de Banach.

Lema 4.3.1. *Sean V y W espacios de Banach. Si $A \in \mathcal{L}(V,W)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$A^T : W' \to V'$ es sobreyectivo.*
2. *$A : V \to W$ es inyectivo e $Im(A)$ es cerrada en W.*
3. *Existe $\alpha > 0$ tal que*
$$\forall v \in V, \quad \|Av\|_W \geq \alpha\|v\|_V. \tag{4.3.5}$$
4. *Existe $\alpha > 0$ tal que*
$$\inf_{v\in V} \sup_{w'\in W'} \frac{\langle w', Av\rangle_{W',W}}{\|w'\|_{W'}\,\|v\|_V} \geq \alpha. \tag{4.3.6}$$

Demostración.

2) $\Rightarrow$ 1) Por 1. del teorema (2.3.9) y el hecho de que la clausura de un conjunto siempre lo contiene, se tiene

$$Ker(A) = (Im(A^T))^\circ,$$

luego por el teorema (2.3.8) se tiene que $Im(A^T)$ es denso en V'. Por el Teorema del rango cerrado (2.3.10), por ser denso $Im(A)$ también ha de serlo $Im(A^T)$. Luego $Im(A^T) = V'$ por ser cerrado y denso en este.

3) $\Rightarrow$ 2) Si $Av = 0$ entonces

$$0 = \|Av\|_W \geq \alpha \|v\|_V \Rightarrow v = 0, \tag{4.3.7}$$

por lo que ha de ser A inyectivo.

Dado que $A : V \to Im(A)$ es biyectivo, para cada $v \in V$ existe $w \in Im(A)$ tal que $A^{-1}w = v$. Luego, usando 3) se tiene

$$\forall w \in Im(A), \quad \|w\|_W = \|A(A^{-1}w)\|_W \geq \alpha \|A^{-1}(w)\|_V, \tag{4.3.8}$$

luego $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Im(A),V)} \leq \frac{1}{\alpha}$ y el operador inverso es acotado, por lo que A es un isomorfismo entre los espacios de Banach V e $Im(A)$.

Como V es completo, $Im(A)$ también ha de serlo. Dada una sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Im(A)$ convergente con $w_n \to w$ para algún $w \in W$, esta es de Cauchy y por ser $Im(A)$ completo se tiene que $w \in Im(A)$, por lo que $Im(A)$ es cerrado.

4) $\Rightarrow$ 3) Se re-escribe 4) empleando el Teorema (2.3.3)

$$\inf_{v\in V} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} = \inf_{v\in V} \sup_{w'\in W'} \frac{\langle w', Av\rangle_{W',W}}{\|w'\|_{W'}\, \|v\|_V} \geq \alpha\,, \tag{4.3.9}$$

luego, por definición de ínfimo

$$\frac{\|Au\|_W}{\|u\|_V} \geq \inf_{v\in V} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \geq \alpha \qquad \forall u \in V, \tag{4.3.10}$$

por lo que multiplicando por $\|u\|_V$ se obtiene 3).

1) $\Rightarrow$ 4) En este paso se emplean el Teorema de la inversa acotada y el Teorema de Banach-Steinhaus. Demostración por el absurdo. Dado que el ínfimo de un conjunto de números positivos no puede ser negativo, la negación de 4) es

$$\inf_{v\in V} \sup_{w'\in W'} \frac{\langle w', Av\rangle_{W',W}}{\|w'\|_{W'}\, \|v\|_V} = 0\,. \tag{4.3.11}$$

Siempre[10] puede tomar una sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumpla

$$\frac{1}{n} > \sup_{w'\in W'} \frac{\langle w', Av_n\rangle_{W',W}}{\|w'\|_{W'}\, \|v_n\|_V} \tag{4.3.12}$$

[10]Basta con tomar una subsucesión adecuada

Sin pérdida de generalidad se la puede tomar con $\|v_n\|_V = 1\, \forall n \in \mathbb{N}$[11].

$$\frac{1}{n} > \sup_{w'\in W'} \frac{\langle w', Av_n\rangle_{W',W}}{\|w'\|_{W'}\,\|v_n\|_V} = \sup_{w'\in W'} \frac{\langle w', Av_n\rangle_{W',W}}{\|w'\|_{W'}} = \sup_{w'\in W'} \frac{\left\langle A^T w', v_n\right\rangle_{V',V}}{\|w'\|_{W'}}.$$

A^T es una función continua cuyo dominio es un espacio de Banach, por ende por la proposición (2.3.1) es cerrada. Si se cumple 1), se tiene que $Im(A^T) = V'$ el cual es de segunda categoría por ser completo, entonces se cumplan las hipótesis del Teorema del rango cerrado.

Luego existe $m > 0$ tal que para cada $v' \in V'$ existe $w'_{v'}$ con $A^T w'_{v'} = v'$ y además $\|w'_{v'}\|_{W'} \leq m\|v'\|_{V'}$

$$\frac{1}{n} > \sup_{w'\in W'} \frac{\left\langle A^T w', v_n\right\rangle_{V',V}}{\|w'\|_{W'}} \geq \frac{\left\langle A^T w'_{v'}, v_n\right\rangle_{V',V}}{\|w'_{v'}\|_{W'}} = \frac{\langle v', v_n\rangle_{V',V}}{\|w'_{v'}\|_{W'}} \geq \frac{1}{m}\frac{\langle v', v_n\rangle_{V',V}}{\|v'\|_{V'}}.$$

entonces se tiene

$$m\|v'\|_{V'} > n\,\langle v', v_n\rangle_{V',V} = \langle v', nv_n\rangle_{V',V}$$

por lo que $\{nv_n\}_{v\in\mathbb{N}}$ está acotada por $m\|v'\|_{V'}$ para cada $v' \in V'$. Por lo que, empleando el contrarecíproco del Teorema de Banach-Steinhaus, se tiene que existe $M > 0$ con $M > \|nv_n\|_{V'} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo cual es absurdo por la propiedad arquimediana de los números reales.

Con esto concluye la demostración por el absurdo de 1) $\Rightarrow$ 4) y por ende se tiene la equivalencia 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4).

■

De forma análoga se obtiene el siguiente resultado

Lema 4.3.2. *Sean V y W espacios de Banach. Si $A \in \mathcal{L}(V, W)$ siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$A : V \to W$ es sobreyectivo.*
2. *$A^T : W' \to V'$ es inyectivo e $Im(A^T)$ es cerrada en V'.*
3. *Existe $\alpha > 0$ tal que*
$$\forall w' \in W', \quad \|A^T w'\|_{V'} \geq \alpha\|w'\|_{W'} \tag{4.3.13}$$
4. *Existe $\alpha > 0$ tal que*
$$\inf_{w'\in W} \sup_{v\in V} \frac{\left\langle A^T w', v\right\rangle_{V',V}}{\|w'\|_{W'}\,\|v\|_V} \geq \alpha \tag{4.3.14}$$

A continuación empleando los dos lemas anteriores, se demuestran el Teorema BNB. El Teorema LLM se demostrará reciclando la demostración del Teorema BNB.

[11] Basta con tomar $u_n = v_n/\|v_n\|_V$.

Teorema 4.3.3 (Banach-Nečas-Babuška). *Sea W un espacio de Banach reflexivo y V un espacio de Banach. Sea $a(\cdot,\cdot) : V \times W \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y sea $f \in W'$. Entonces el problema (4.3.3) tiene solución si y sólo si se cumplen*

1. *Existe $\alpha > 0$,* $\quad \text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \dfrac{a(v,w)}{\|w\|_W \, \|v\|_V} \geq \alpha$

2. *Para todo $v \in V$ se tiene que $(\forall w \in W, a(v,w) = 0) \Rightarrow (v = 0)$*

$\Rightarrow$) Sea A el operador asociado a $a(\cdot,\cdot)$. En este contexto, la hipótesis 2. significa simplemente que el operador A es inyectivo.

Como éste es el operador solución del problema (4.3.3), el cual es biyectivo por hipótesis[12], el operador es en particular inyectivo.

Por otro lado, si el problema tiene solución para todo $f \in W'$ se tiene que A es sobreyectivo. Notar que al ser $A : V \to W'$ se tiene $A^T : W'' \to V'$.

Como se cumplen las hipótesis del lema (4.3.2) se tiene que la sobreyectividad de A es equivalente a

$$\text{ínf}_{w''\in W''} \sup_{v\in V} \frac{\left\langle A^T w'', v\right\rangle_{V',V}}{\|w''\|_{W''} \, \|v\|_V} \geq \alpha \,. \tag{4.3.15}$$

Sea $\Phi : W \to W''$ el isomorfismo cánonico de espacios de Banach que existe por ser W reflexivo. Dado que Φ es sobreyectivo se tiene

$$\text{ínf}_{w''\in W''} \sup_{v\in V} \frac{\left\langle A^T w'', v\right\rangle_{V',V}}{\|w''\|_{W''} \, \|v\|_V} = \text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{\left\langle A^T \Phi w, v\right\rangle_{V',V}}{\|\Phi w\|_{W''} \, \|v\|_V} \,.$$

Por ser Φ isomorfismo de espacios de Banach se tiene que $\|w\|_W = \|\Phi w\|_{W''}$ para todo $w \in W$, entonces

$$\text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{\left\langle A^T \Phi w, v\right\rangle_{V',V}}{\|\Phi w\|_{W''} \, \|v\|_V} = \text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{\left\langle A^T \Phi w, v\right\rangle_{V',V}}{\|w\|_W \, \|v\|_V} \,.$$

Usando la definición de traspuesta se tiene

$$\text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{\left\langle A^T \Phi w, v\right\rangle_{V',V}}{\|w\|_W \, \|v\|_V} = \text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{\langle \Phi w, Av\rangle_{W'',W'}}{\|w\|_W \, \|v\|_V} \,.$$

Usando la definición de Φ se llega a

$$\text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{\langle \Phi w, Av\rangle_{W'',W'}}{\|w\|_W \, \|v\|_V} = \text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{\langle Av, w\rangle_{W',W}}{\|w\|_W \, \|v\|_V} \,.$$

Por lo tanto, por ser A el operador asociado a $a(\cdot,\cdot)$ se da la siguiente igualdad

$$\text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{\langle Av, w\rangle_{W',W}}{\|w\|_W \, \|v\|_V} = \text{ínf}_{w\in W} \sup_{v\in V} \frac{a(v,w)}{\|w\|_W \, \|v\|_V} \geq \alpha.$$

[12] Estar bien planteado garantiza que la solución exista y sea única para cada $f \in W'$.

$\Leftarrow$) La vuelta es seguir la demostración yendo para atrás. Todos los pasos empleados para demostrar que A sobreyectivo implica 1) se puede seguir las igualdades en sentido inverso. Así mismo, como la hipótesis 2) significa que el operador es inyectivo, reuniendo inyectividad y sobreyectividad se obtiene la biyectividad.

■

Corolario 4.3.4. *Si se cumplen las condiciones del enunciado y u es la solución del problema (4.3.3) con dato f, entonces se tiene*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{W'}$$

Demostración. Se desprende de que $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V,W')} \leq \dfrac{1}{\alpha}$, lo cual a su vez es consecuencia del Teorema de la inversa acotada.

Nota. En realidad el Teorema de BNB es un poco más restrictivo, ya que pide que tanto V como W sean espacios de Hilbert. Este enunciado es una pequeña generalización que sirve cuando V es un espacio de Banach y W es otro espacio de Banach. No es más general que el Teorema LLM en un sentido estricto, ya que el Teorema LLM no pide que el segundo espacio sea completo. Pero el Teorema BNB da condiciones necesarias y suficientes para que el problema (4.3.3) tenga solución única, no sólo para que ésta exista.

Nota. Una forma bilineal V-elíptica cumple trivialmente la condición 1. del Teorema BNB, ya que la cumple tomando doble ínfimo. Como también cumple condición 2. por ser $a(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, y todo espacio de Hilbert es reflexivo, se tiene que el Teorema BNB implica el Teorema de Lax-Milgram, así que es estrictamente más general que este.

Teorema 4.3.5 (Teorema de Lion-Lax-Milgram)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y V un espacio normado. Dada una forma bilineal continua $a : H \times V \to \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Existe $\alpha > 0$ tal que* $\inf_{v \in V} \sup_{w \in H} \dfrac{a(w,v)}{\|w\|_H \, \|v\|_V} \geq \alpha$
2. *El problema (4.3.1) tiene solución para todo $f \in V'$.*

Demostración.

El operador asociado a $a(\cdot,\cdot)$, el operador $A : H \to V'$ es un operador entre espacios de Banach (V' siempre es completo por ser dual). Por ende se puede aplicar el lema (4.3.2), en particular la equivalencia 4) $\Leftrightarrow$ 1). Empleando que H es reflexivo (por ser Hilbert), se puede aplicar el proceso empleado en la demostración de la sobreyectividad de A en el Teorema BNB, con lo cual concluye la demostración.

■

Corolario 4.3.6. *Si se cumplen las condiciones del enunciado entonces existe algún u que es solución del problema (4.3.1) con dato f, entonces y cumple:*

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{c}\|f\|_{V'}$$

Nuevamente este resultado se debe al Teorema de la inversa acotada.

4.4. Formulación del Teorema BNB en problemas mixtos

Existen problemas en la física para los cuales la formulación natural tiene dos variables dato y dos variables incógnita, razón[13] por la cual existen las formulaciones variacionales con sistemas de ecuaciones las cuales son conocidas como formulaciones mixtas.

En esta sección se analiza el siguiente problema:

Sean dos espacios de Banach V, Q, y sean $A : V \to V'$ y $B : V \to Q$ dos operadores lineales acotados. Dados $f \in V'$ y $g \in M$ se desea resolver el siguiente problema

$$\text{Hallar } u \in V \text{ y } p \in Q' \text{ tales que } \begin{cases} Au + B^T p & = f, \\ Bu & = g \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Se puede definir el operador $\mathcal{A} : V \times Q' \to V' \times Q$ dado como $\mathcal{A}(u,p) = (Au + B^T p, Bu)$, empleando la norma $\|(u,p)\|_{V\times Q'} = \|u\|_V + \|p\|_{Q'}$ y emplear la teoría previamente desarrollada para este problema. Pero suele ser más conveniente obtener las condiciones necesarias y suficientes, para poder aplicar el método de elementos finitos correctamente, en términos de los operadores A y B. Razón por la cual se formulan principios variacionales análogos al Teorema de Lax Milgram o sus generalizaciones, pero en términos del espacio producto.

Antes de enunciar la formulación del Teorema BNB para problemas mixtos, se define el siguiente operador.

Llámese $\pi A : Ker(B) \to Ker(B)'$ al operador lineal dado por $\langle \pi A u, v\rangle_{Ker(B)',Ker(B)} = \langle \pi A u, v\rangle_{V',V}$ para todo $u, v \in Ker(B)$.

Teorema 4.4.1. *El problema (4.4.1) está bien planteado si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones*

1. $\pi_{Ker(B)} A : Ker(B) \to Ker(B)'$ *es un isomorfismo de espacios de Banach.*
2. $B : V \to Q$ *es sobreyectivo.*

Demostración.
$\Longrightarrow$)
• Sobreyectividad de B. Si el problema siempre tiene solución, entonces dado $g \in Q$ el problema tiene solución para el par $(0, g)$ lo cual, por la segunda ecuación del problema, implica que existe un par $u \in V$ tal que $Bu = g$. Por lo que B es sobreyectivo.
• Sobreyectividad de πA. Sea $h \in Ker(B)'$. Empleando el Teorema de Hahn-Banach se extiende h a $\tilde{h} \in V'$ con $\|h\|_{Ker(B)'} = \|\tilde{h}\|_{V'}$, tal que $\tilde{h}_{|Ker(B)} = h$. Sea (u, p) una solución del problema (4.4.1) con $f = \tilde{h}$ y $g = 0$. Se tiene que $Bu = 0$ por lo que $u \in Ker(B)$.

Dado que $\left\langle B^T p, v\right\rangle_{V',V} = \langle p, Bv\rangle_{Q',Q} = 0$ para todo $v \in Ker(B)$, empleando la primera ecuación del sistema se tiene

$$\langle \tilde{h}, v\rangle_{V',V} = \langle Au, v\rangle_{V',V} + \left\langle B^T p, v\right\rangle_{Q',Q} = \langle Au, v\rangle_{V',V} = \langle \pi A u, v\rangle_{Ker(B)',Ker(B)} \ ,$$

[13] A veces se emplean formulaciones mixtas por cuestiones de implementación, los elementos de gran orden son más dificiles de implementar y los esquemas mixtos pueden servir para reducir el orden de los polinomios usados para aproximar las funciones. Para mas información ver ([Boffi et al., 2013])

para todo $v \in Ker(B)$. Como en ese caso $\tilde{h}$ coincide con h, se tiene que $\pi Au = h$.

• Inyectividad de πA. Sea $u \in Ker(B)$ tal que $\pi Au = 0$.

Entonces, $\langle Au, v\rangle = 0$ para todo $v \in Ker(B)$, y por ende $Au \in Ker(B)^\circ$.

Dado que B es sobreyectivo, $Im(B) = Q$ es cerrado. Luego, por el Teorema del rango cerrado se tiene $Im(B^T) = Ker(B)^\circ$. Entonces $Au \in Im(B^T)$.

Es decir, existe $p \in Q'$ tal que $Au = B^T p$.

Tomando el par $(u, -p)$, se tiene que $Au + B^T(-p) = 0$ y $Bu = 0$, por lo que $(u, -p) = (0, 0)$ por tener solución única el problema (4.4.1).

$\Longleftarrow$) Supóngase que se cumplen 1. y 2.

• Existencia de solución.

Dado el par $(f, g) \in V' \times Q$, se desea hallar (u, p) que sea solución del problema (4.4.1) con datos (f, g).

Dado que B es sobreyectivo, existe al menos un $u_g \in V$ tal que $Bu_g = g$. Se tiene que $f - Au_g \in V'$. Sea $h_{f,g} \in Ker(B)'$ tal que

$$\langle h_{f,g}, v\rangle_{Ker(B)',Ker(B)} = \langle f, v\rangle_{V',V} - \langle Au_g, v\rangle_{V',V} = \langle f, v\rangle_{V',V} - \langle g, v\rangle_{V',V}\ ,$$

para todo $v \in Ker(B)$.

Sea $\phi \in Ker(B)$ la solución del problema $\pi A\phi = h_{f,g}$ y considerando $u = \phi + u_g$, el funcional $f - Au$ está en $Ker(B)^\circ$ ya que

$$\begin{aligned} & \langle f, v\rangle_{V',V} - \langle Au_g, v\rangle_{V',V} - \langle A\phi, v\rangle_{Ker(B)',Ker(B)} = \\ = \quad & \langle f, v\rangle_{V',V} - \langle Au_g, v\rangle_{V',V} - \langle h_{f,g}, v\rangle_{Ker(B)',Ker(B)} = 0. \end{aligned}$$

Dado que B es sobreyectivo, por el lema (4.3.2) se tiene que $Im(B^T)$ es cerrada, entonces por el Teorema del rango cerrado se tiene $Ker(B)^\circ = Im(B^T)$, es decir, existe $p \in Q'$ tal que $B^T p = f - Au$. Finalmente $Bu = B(\phi + u_g) = Bu_g = g$. Por lo que (u, p) es solución del problema (4.4.1).

• Unicidad de la solución.

Sea (u, p) solución del problema con $(f, g) = (0, 0)$. Se tiene que $u \in Ker(B)$. De $Au + B^T p = 0$ se tiene que en particular:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Au, v\rangle_{V',V} + \left\langle v, B^T p\right\rangle_{V',V} = \langle Au, v\rangle_{V',V} + \langle Bv, p\rangle_{V',V} = && \forall\, v \in Ker(B) \\ &= \langle Au, v\rangle_{V',V} && \forall\, v \in Ker(B) \end{aligned}$$

Por lo que $\pi Au = 0$. Por la inyectividad de πAu se tiene que $u = 0$. Luego $0 = Au + B^T p = B^T p$, y como B^T es inyectivo por el lema (4.3.2) y la sobreyectividad de B, se tiene que $p = 0$.

■

Nota. La demostración del Teorema anterior, en el caso de que X y M sean espacios de Hilbert se encuentra en ([Boffi et al., 2013]). No emplea el Teorema de Hahn-Banach dado que en espacios de Hilbert se puede hacer la siguiente identificación:

Proposición 4.4.2. *Dado un espacio de Hilbert V y un subespacio cerrado $S \subset V$, se puede identificar a S' como el conjunto de funcionales $f \in V'$ tales que $f(v) = 0$ para todo $v \in S^{\perp}$. En términos más precisos, existe un operador lineal $\Gamma : V' \to S'$ con $\|\Gamma\|_{V',S'} = 1$ tal que $\langle f, \pi_S v\rangle_{V',V} = \langle \Gamma f, \pi_S v\rangle_{S',S}$ para todo $v \in V$.*

Del mismo modo que en los problemas no mixtos en los cuales se emplea el Teorema BNB, para este problema existen cotas que se puede deducir de las condiciones inf-sup. En este caso la demostración no es tan directa, pero se emplean los mismos principios con cuentas un poco mas engorrosas. Ejemplificamos un caso para espacios de Hilbert.

Proposición 4.4.3. *Dado problema (4.4.1) con $V = W$ un espacio de Hilbert y pensando a $A : V \to V$ por haber identificado a V' con V. Sea $K = Ker(B)$ y sea*

$$\|a\| = \sup_{v,w\in V} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \, \|w\|_V} \tag{4.4.2}$$

Si se cumplen las condiciones inf-sup:

1. Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\inf_{w\in K} \sup_{v\in K} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \, \|w\|_W} > \alpha < \inf_{v\in K} \sup_{w\in K} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \, \|w\|_W}$$

2. Existe $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{q\in Q} \sup_{v\in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V \, \|q\|_Q} > \beta$$

entonces se cumplen las siguientes cotas

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'} + \frac{2\|a\|^{1/2}}{\alpha^{1/2}\beta}\|g\|_{Q'}$$

$$\|p\|_Q \leq \frac{2\|a\|^{1/2}}{\alpha^{1/2}\beta}\|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{\beta^2}\|g\|_{Q'}$$

La versión en espacios de Banach es un tanto más complicada y requiere una exposición más detallada.

Comentarios finales de la sección:

• Existen teoremas que cumplen el rol del lema de Céa en el caso del Teorema de Lax-Milgram tanto para los Teoremas de la sección anterior, problemas de LLM y BNB, como para las formulaciones mixtas. No obstante, estos Teoremas no son tan inmediatos ya que las condiciones del tipo inf-sup aquí encontradas no se bastan para dar una aproximación como la dada por el lema de Céa, por lo que han de requerirse hipótesis más sofisticadas. Tanto es así, que durante algunos años se pensó que el método de elementos finitos sólo se podía aplicar a problemas cuyo operador sea V-elíptico.

• El lector interesado en ejemplos de aplicaciones a ecuaciones diferenciales del método de elementos finitos puede consultar ([Ern and Guermond, 2004]) para problemas en los cuales se aplica el Teorema BNB, ([Boffi et al., 2013]) para problemas en los que se aplican métodos mixtos. Otros textos sobre el tema son ([Ciarlet, 1978]) y ([Brenner and Scott, 2002]).

4.5. Un ejemplo de aplicación

En esta sección se asume la familiaridad del lector con los espacios de Sobolev. Para repaso se pueden consultar los apéndices de varios de los libros de elementos finitos citados. Para un tratado con mayor profundidad se puede consultar ([Brezis, 2010]).

Este ejemplo tiene finalidad triple. Primero la forma bilineal que caracteriza al problema no es $V \times Q$-elíptica[14] por lo que no puede aplicarse el Teorema de Lax-Milgram en forma directa. No obstante, dentro del desarrollo del problema se emplea el Teorema de Lax-Milgram dos veces por lo que sirve para ilustrar el poder del Teorema de Lax-Milgram. Finalmente, sirve como ejemplo de las formulaciones mixtas.

Ejemplo 4.5.1 (Formulación mixta del problema de Poisson)**.** Una formulación variacional del problema de Poisson es la siguiente:

Dado $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in V = H(div, \Omega)$ y $p \in Q = L^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \underline{u} \cdot \underline{v}\, dx + \int_\Omega p\, div\, \underline{v}\, dx &= 0, && \forall \underline{v} \in H(div, \Omega) \\ \int_\Omega q\, div\, \underline{u}\, dx &= -\int_\Omega f\, q\, dx && \forall q \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Para expresar el problema en términos de la teoría se llama

$$b(\underline{v}, q) = \int_\Omega div\, \underline{v}\, q\, dx$$

entonces B es el operador divergencia de $H(div, \Omega)$ a $L^2(\Omega)$. Este es sobreyectivo, esto se puede demostrar con el siguiente problema:

Hallar $\psi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\Delta\psi = g$. Una formulación variacional de este problema es

$$\int_\Omega \underline{grad}\, \psi \cdot \underline{grad}\, \phi\, dx = -\int_\Omega g\, \phi\, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.5.1}$$

problema que tiene solución única gracias al Teorema de Lax-Milgram[15]. Entonces tomando $\underline{v}_g = \underline{grad}\psi$ donde ψ es la solución de (4.5.1) y se tiene $div \underline{v}_g = div(grad\psi) = \nabla\psi = g$.

El núcleo de B está compuesto por los vectores $\underline{v}_0 \in H(div, \Omega)$ tales que $div\, \underline{v}_0 = 0$. La forma bilineal a está dada por

[14] Esto querría decir que existe $\alpha > 0$ tal que $\|\underline{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2b(\underline{v}, p) \geq \alpha(\|\underline{v}\|^2_{H^1(div,\Omega)} + \|p\|^2_{L^2(\Omega)})$, lo cual no es posible ya que la forma bilineal ni siquiera es semidefinida positiva. Para consultar sobre métodos mixtos planteados como un método tradicional en el espacio producto, consultar la sección 11.1 de ([Babuška and Osborn, 1980]).

[15] Se puede comprobar que la forma bilineal de (4.5.1) es $H^1(\Omega)$-elíptica debido a que en $H_0^1(\Omega)$ la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y la semi norma $|\cdot|_{1,\Omega}$ son equivalentes. Con lo cual la $H_0^1(\Omega)$-elipticidad da trivialmente porque $\int_\Omega \underline{grad}\, \phi \cdot \underline{grad}\, \phi\, dx = |\phi|^2_{1,\Omega}$, entonces se puede aplicar Lax-Milgram con la forma bilineal $c(\psi, \phi) = \int_\Omega \underline{grad}\, \psi \cdot \underline{grad}\, \phi\, dx$. En este caso la constante de $H_0^1(\Omega)$-elipticidad es la de equivalencia de normas.

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{u} \cdot \underline{v} \, dx$$

Entonces a es coercitiva en $Ker(B)$ ya que $\|\underline{v}\|^2_{H(div,\Omega)} = \|\underline{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|div\ \underline{v}\|^2_{L^2(\Omega)}$, y como $Ker(B)$ estaba compuesto por las funciones de divergencia nula se tiene

$$a(\underline{v}, \underline{v}) = \|\underline{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^n} = \|\underline{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \|div\ \underline{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.5.2}$$

y la coercitividad se cumple con constante $\alpha = 1$. Entonces πA es biyectivo en $Ker(B) \rightarrow Ker(B)$ por el Teorema de Lax-Milgram. Por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema (4.4.1) y el problema de Poisson está bien planteado.

Nota. Como se trabaja con espacios de Hilbert se empleo la identificación natural dada por el Teorema de representación de Riesz, $V \equiv V'$ y $Q \equiv Q'$. Visto esto, este problema encaja en el marco teórico del Teorema (4.4.1).

Para aproximar este problema se pueden emplear los espacios Raviart-Thomas para aproximar el par (V, Q). Para un desarrollo exhaustivo de elementos finitos mixtos ver ([Boffi et al., 2013]).

5. Conclusiones

Esta sección corresponde meramente con la apreciación del autor del tema, así que para denotarlo se empleará primera persona singular.

Si el Teorema de Lax-Milgram es un resultado importante por si mismo, ya que da condiciones suficientes para que un problema esté bien planteado, es un resultado importante. No obstante, considero que reviste mayor importancia histórica que aplicada.

A pesar de existir resultados teóricos más generales, hoy en día sigue siendo importante teóricamente porque, cuando puede aplicarse, es de aplicación más directa que sus generalizaciones, y su aplicación al método de elementos finitos es especialmente directa. En particular, el Teorema de Céa puede pensarse como un mero[16] corolario del Teorema de Lax-Milgram en el contexto de elementos finitos.

Aun así, su importancia histórica es mucho mayor. En un contexto histórico en el cual tanto los espacios de Hilbert, Sobolev como el método de elementos finitos eran jóvenes, el Teorema de Lax-Milgram es un paso en la dirección correcta. Demuestro el poder de los espacios de Hilbert como marco teórico para desarrollar una teoría de análisis numérico satisfactoria. Al tratarse de espacios bastante más sofisticados que los espacios clásicos de funciones continuas, que esta teoría se aplique al método de elementos finitos apoya la idea de que esta abstracción es un precio bajo a pagar por la profundización de la comprensión brindada por estos.

Finalmente, el Teorema de Lax-Milgram colaboró a la consolidación de los espacios de Banach y Hilbert como contexto natural para la formulación del método de elementos finitos[17]. Con esto surgieron ricas generalizaciones que no hicieron más que confirmar que los espacios de Hilbert/Banach eran el ambiente correcto en el cual formular FEM. Mención especial a los espacios de Sobolev, los cuales junto con sus variantes son los espacios de Banach más empleados en la práctica por diversas razones, pero esto último escapa al tema de esta monografía.

Referencias

[Babuška, 1971] Babuška, I. (1971). Error-bounds for finite element method.

[Babuška and Osborn, 1980] Babuška, I. and Osborn, J. (1980). Eigenvalue problems.

[Bachman and Narici, 1966] Bachman, G. and Narici, L. (1966). *Functional Analysis.* Academic Press textbooks in mathematics. Dover Publications.

[16] No pretendo quitarle relevancia al trabajo de Céa, después de todo tan importantes como las pruebas es hallar los enunciados adecuados que dan vida e impulsan el desarrollo matemático. Una demostración, una conjetura o un corolario pueden ser igual de importantes y no hay que despreciar el impacto por su naturaleza de 'corolario'.

[17] No nos olvidemos, hoy en día por método de elementos finitos en el ambiente académico nos referimos al método descrito con la formulación débil. Pero inicialmente FEM (Finite Element Method) hacía referencia al algoritmo, que es el que daba resultados aplicados.

[Boffi et al., 2013] Boffi, D., Brezzi, F., and Fortin, M. (2013). *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.

[Brenner and Scott, 2002] Brenner, S. and Scott, L. (2002). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York.

[Brezis, 2010] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York.

[Céa, 1964] Céa, J. (1964). Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle. *Annales de l'institut Fourier*, 14:345–444.

[Ciarlet, 1978] Ciarlet, P. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Studies in Mathematics and its Applications. Elsevier Science.

[Ern and Guermond, 2004] Ern, A. and Guermond, J. (2004). *Theory and Practice of Finite Elements*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York.

[Lions, 1961] Lions, J. (1961). *Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg.

[Munkres, 2000] Munkres, J. (2000). *Topology*. Featured Titles for Topology Series. Prentice Hall, Incorporated.

[Nečas, 1962] Nečas, J. (1962). Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 16(4):305–326.

[Peter Lax, 1954] Peter Lax, A. M. (1954). Parabolic equations. *Ann. Math. Studies 33 (Princeton)*, pages 167–190.

[Rudin, 1991] Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill.

[W. Clough, 1990] W. Clough, R. (1990). Original formulation of the finite element method. 7:89–101.

[ZLÁMAL, 1968] ZLÁMAL, M. (1968). On the finite element method. *Numerische Mathematik*, 12:394–409.