Órbitas cerradas para un sistema semi-dinámico cerca de un equilibrio

Expositor: Mariel Paula Kuna (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires e IMAS-CONICET, mpkuna@dm.uba.ar)
Autor/es: Pablo Amster (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires e IMAS-CONICET, pamster@dm.uba.ar); Mariel Paula Kuna (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires e IMAS-CONICET, mpkuna@dm.uba.ar); Gonzalo Robledo (Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, grobledo@u.uchile.cl)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domino acotado con borde suave. Un resultado clásico de EDO dice que si una función suave $G : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ apunta hacia adentro en $\partial\Omega$, entonces las soluciones del sistema autónomo

$$u'(t) = G(u(t))$$

con dato inicial $u(0) = u_0 \in \overline{\Omega}$ están definidas y se mantienen dentro de Ω para todo $t > 0$.

Para p continua y $T-$periódica, consideremos la siguiente perturbación del sistema original

$$u'(t) = G(u(t)) + p(t).$$

Si $\overline{\Omega}$ tiene la propiedad de punto fijo, entonces el sistema tiene al menos una órbita $T-$periódica si $\|p\|_\infty$ es pequeña. Esto se debe al hecho de que $G(\cdot) + p(t)$ sigue apuntando hacia adentro sobre $\partial\Omega$ para todo t; luego, el conjunto $\overline{\Omega}$ es invariante para el flujo asociado y, por lo tanto, el operador de Poincaré, dado por $Pu_0 := u(T)$, está bien definido para $u_0 \in \overline{\Omega}$ y satisface $P(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$. Más aún, por el teorema de Hopf se deduce que

$$deg_B(G, \Omega, 0) = deg_B(-\nu, \Omega, 0) = (-1)^N \chi(\Omega),$$

donde deg_B denota el grado de Brouwer, ν es la normal exterior y $\chi(\Omega)$ es la característica de Euler de Ω.

Ahora supongamos que el sistema autónomo tiene un punto de equilibrio e; luego, por la propiedad de escisión del grado se prueba que para casi todos los valores de $\overline{p}$ en un entorno de $0 \in \mathbb{R}^N$, la aplicación $G + \overline{p}$ tiene al menos Γ raíces diferentes en Ω, donde

$$\Gamma := |\chi(\Omega) - (-1)^N sgn(\det(DG(e)))| + 1.$$

En consecuencia, empleando el lema de Sard-Smale, se ve que si $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ es T-periódica y $\|p\|_\infty$ es pequeña, entonces la cantidad de soluciones $T-$periódicas del sistema no autómono es, genéricamente, al menos Γ. Aquí, 'genericamente' debe ser entendido en el sentido de las categorías de Baire.

La situación es diferente para el siguiente sistema de ecuaciones con retardo

$$u'(t) = g(u(t), u(t-\tau))$$

donde $g : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ es continuamente diferenciable. En primer lugar, debido al retardo, la condición de que el campo $G(x) := g(x, x)$ apunte hacia adentro en $\partial\Omega$ no evita que las soluciones con dato inicial $x_0 := \phi \in C([-\tau, 0], \overline{\Omega})$ puedan eventualmente salir de $\overline{\Omega}$. En segundo lugar, las observaciones previas respecto al operador de Poincaré resultan menos obvias, ya que el operador ahora no está definido en el espacio de estados de dimensión finita $\overline{\Omega}$ sino un subconjunto del espacio de Banach $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^N)$.

En este trabajo mostraremos que, bajo condiciones apropiadas, las ideas anteriores para el caso sin retardo pueden extenderse a fin de obtener múltiples órbitas T-peródicas para perturbaciones no autónomas del sistema con retardo.