Determinante e inversa de matrices circulantes a bloques

Expositor: Cristian Panelo (Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales UNSL, cristian.panelo.tag@gmail.com)
Autor/es: Cristian Panelo (Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales UNSL, cristian.panelo.tag@gmail.com); Daniel Alejandro Jaume (Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales UNSL, daniel.jaume.tag@gmail.com)

Definición 1: Sean n, r, s y t enteros no negativos tales que $0 \leq t < s \leq n-1$. Sean A y B matrices cuadradas de orden r. Con $C_{n,t,s}(A, B)$ denotamos la matriz circulante a bloques $Circ\,(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1})$, donde $C_t = A$, $C_s = B$, y para todo $h \neq s, t$, $C_h = O_r$ es la matriz de ceros de orden r.

Usualmente trabajamos con $t = 0$, en este caso sólo escribimos $C_{n,s}(A, B)$ en lugar de $C_{n,0,s}(A, B)$.

Sean n y s dos enteros. Su máximo común divisor es denotado con $\gcd(n, s)$. Además denotamos $n \backslash s := \frac{n}{\gcd(n,s)}$. Con $[s]_n$ denotaremos la primer solución no negativa de la ecuación $s = x \mod n$.

Teorema 2: Sean n y s enteros no negativos tales que $0 < s \leq n-1$. Sean A y B matrices cuadradas de orden r tales que $AB = BA$ y A es no singular. Entonces

$$\det\left(C_{n,s}(A, B)\right) = (\det(A))^n \left(\det\left(I_r - \left(-A^{-1}B\right)^{n\backslash s}\right)\right)^{\gcd(n,s)}.$$

Definición 3: Sean n y s enteros no negativos tales que $0 < s \leq n-1$. Sean A y B matrices cuadradas de orden r tales que $A^{n\backslash s} - (-B)^{n\backslash s}$ es no singular. Para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, definimos

$$\Omega(i) = \begin{cases} A^{\alpha_i} B^{\beta_i} \left(A^{n\backslash s} - (-B)^{n\backslash s}\right)^{-1}, & \text{si } i \in R(n, s), \\ O_r, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $\alpha_i = n\backslash s - \vec{d}(i) - 1$ y $\beta_i = \vec{d}(i)$ y $\vec{d}(i)$ es tomado del digrafo $D\left(C_{n,s}(1, 1)\right)$, asociado a la matriz $C_{n,s}11$, y

$R(n, s) := \{[0.s]_n, [1.s]_n, \ldots, [((n\backslash s) - 1).s]_n\}$,

También definimos la siguiente matriz circulante a bloques

$D^M_{n,s}(A, B) := Circ\left((-1)^{\beta_0}\Omega(0), \ldots, (-1)^{\beta_{n-1}}\Omega(n-1)\right)$,

donde β_i y $\Omega(i)$ están dados en la Definición 3.

Teorema 4: Sean n y s dos enteros no negativos tales que $0 < s \leq n-1$, y sean A y B dos matrices cuadradas de orden r. Si $B \neq \pm A$ y $A^{n\backslash s} - (-B)^{n\backslash s}$ es no singular, entonces $C_{n,s}(A, B)$ es invertible y su inversa es $D^M_{n,s}(A, B)$.