Posets asociativos

Expositor: Pedro Sánchez Terraf (Universidad Nacional de Córdoba — CIEM-FaMAF, sterraf@famaf.unc.edu.ar)
Autor/es: Alejandro Petrovich (Universidad de Buenos Aires, apetrov@dm.uba.ar); Pedro Sánchez Terraf (Universidad Nacional de Córdoba — CIEM-FaMAF, sterraf@famaf.unc.edu.ar)

Para todo poset $\mathbf{P} := \langle P, \leq \rangle$ existe un producto $\cdot$ tal que se da la equivalencia

$$a \leq b \iff a \cdot b = a.$$

Un ejemplo canónico es el de los semiretículos inferiores $\mathbf{P}$, para los cuales se puede elegir $\cdot$ de manera que sea conmutativo y asociativo.

Un poset es *asociativo* si admite una tal operación que sea asociativa. El problema general de la clasificación de los posets asociativos no es trivial, lo que es atestiguado por algunos de los resultados parciales que presentaremos:

Teorema 1. La clase de los posets asociativos, en el lenguaje $\{\leq\}$ no es de primer orden (aunque sí es cerrada por ultraproductos).

Un *árbol de tres niveles* es un poset T con máximo 1 tal que hay subconjuntos disjuntos no vacíos C y M_c ($c \in C$) que cumplen

- $T = \{1\} \sqcup C \sqcup \bigcup_{c \in C} M_c$.
- $\nexists c, z.\ c \in C \land c < z < 1$,
- M_c es una anticadena bajo c.

Se sigue que C son “coátomos” de T y M_c consiste de elementos minimales para cada $c \in C$.

Teorema 2. Son equivalentes:

- Todo árbol de tres niveles es asociativo.
- El Axioma de Elección.