Gamma convergence and asymptotic behavior for eigenvalues of nonlocal problems

Expositor: Juan F. Spedaletti (Departamento de Matematica, Universidad Nacional de San Luis (UNSL)-Instituto de Matemática Aplicada San Luis (IMASL), jfspedaletti@unsl.edu.ar)
Autor/es: Juan F. Spedaletti (Departamento de Matematica, Universidad Nacional de San Luis (UNSL)-Instituto de Matemática Aplicada San Luis (IMASL), jfspedaletti@unsl.edu.ar); Julián Fernández Bonder (Departamento de Matematica, Universidad de Buenos Aires (UBA)-Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis Santaló (IMAS), jfbonder@dm.uba.ar); Analia C. Silva (Departamento de Matematica, Universidad Nacional de San Luis (UNSL)-Instituto de Matemática Aplicada San Luis (IMASL), analia.silva82@gmail.com)

En este trabajo estudiamos el comportamiento asintótico de diversos problemas que involucran operadores no locales con un enfoque unificado que involucra el concepto de $\Gamma-$*convergencia*. Este enfoque ya fue desarrollado por Champion y De Pascale [ChaDP]. En este trabajo los autores prueban, en el contexto de problemas de autovalores para el $p-$Laplaciano, un resultado abstracto que permite demostrar de manera unificada comportamiento asintótico de algunos problemas de autovalores que involucran el operador $p-$Laplaciano y que incluyen el caso $p \to \infty$ y algunos resultados de homogeneización.

En recientes años ha crecido el interés en comprender el fenomeno no local y como consecuencia de ello los problemas de autovalores asociados [BPS, LL, DRS] entre otros.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $F_n\colon L^1(\Omega) \to [0,\infty]$ es una familia de funciones que cumple:

A1 Por cada $n \in \mathbb{N}$, F_n es convexa y 1-homogenea.

A2 Existen constantes $0 < \alpha < \beta$ tales que para $n \in \mathbb{N}$ existe $p_n \in [1,\infty]$ y $s_n \in (0,1]$, tal que

$$\alpha(1-s_n)^{\frac{1}{p_n}}[v]_{s_n,p_n} \le F_n(v) \le \beta(1-s_n)^{\frac{1}{p_n}}[v]_{s_n,p_n} \text{ if } v \in W_0^{s_n,p_n}(\Omega),$$
$$F_n(v) = +\infty \text{ en otro caso}$$

A3 Existen $p_0 \in [1,\infty]$ y $s_0 \in (0,1]$ tales que las sucesiones $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dadas en (A2) verifican que $p_n \to p_0$ y $s_n \to s_0$ si $n \to \infty$. Existe $F_0\colon L^1(\Omega) \to [0,\infty]$ tales que F_n $\Gamma-$converge en $L^{p_0}(\Omega)$ (o $C_0(\Omega)$ si $p_0 = \infty$) a F_0.

Definimos

$$\mathcal{G}^k_{s,p} = \left\{ G \subset W_0^{s,p}(\Omega)\colon \begin{array}{l} G = -G \text{ cerrado y acotado en } W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_p = 1,\ \forall u \in G \text{ y } \gamma(G) \ge k \end{array} \right\},$$

y por cada $k \in \mathbb{N}$ asociamos con F_n la funcional $J^k_n\colon K_{sym}(\Omega) \to [0,\infty]$ definida como

$$J^k_n(G) := \begin{cases} \sup_{v\in G} F_n(v), & G \in \mathcal{G}^k_{s_n,p_n}; \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $K_{sym}(\Omega)$ es la colección de subconjuntos compactos y simétricos de $L^{p_0}(\Omega)$ (o $C_0(\Omega)$ si $p_0 = +\infty$).

Definimos el $k-$*ésimo* autovalor del funcional F_n como

$$\lambda^k_n := \inf_{G\in K_{sym}(\Omega)} J^k_n(G).$$

En este contexto, como resultado principal de este trabajo, obtenemos que $\{J_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicoerciva, $\Gamma - \liminf_{n\to\infty} J_n^k \geq J_0^k$ y

$$\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{G\in K_{sym}(\Omega)} J_n^k(G)\right) = \inf_{G\in K_{sym}(\Omega)} J_0^k(G).$$

A partir del mencionado resultado implicamos una serie de problemas conocidos y obtenemos resultados nuevos.

Referencias

[BPS] Lorenzo Brasco, Enea Parini, and Marco Squassina, *Stability of variational eigenvalues for the fractional $p-$Laplacian,* Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), no. 4, 1813-1845. MR 3411543

[ChaDP] Thierry Champion and Luigi De Pascale, *Asymptotic behavior of the nonlinear eigenvalue problems involving $p-$laplacian-type operators,* Proceedings of the Royal Society of Edimburgh **137A** (2017), 1179-1195.

[DRS] Leandro M Del Pezzo, Julio D Rossi, and Ariel M Salort, *Fractional eigenvalue problems that aproximate Steklov eigenvalue problems,* Proceedings of the Royal Society of Edimburgh Section A: Mathematics **148** (2018), no. 3, 499-516.

[LL] Erik Lindgren and Peter Lindqvist, *Fractional Eigenvalues,* Cal. Var. Partial Differential Equations **49** (2014), no. 1-2, 795-826. MR 3148135