Estudio de la Ecuación de Nicholson con feedback positivo

Expositor: Carlos Héctor Daniel Alliera (Departamento de Matemática FCEN (UBA), mustufar1@yahoo.com.ar)
Autor/es: Carlos Héctor Daniel Alliera (Departamento de Matemática FCEN (UBA), mustufar1@yahoo.com.ar)

La ecuación de Nicholson con retardo muestra la dinámica del crecimiento poblacional de ciertas especies. En este trabajo vamos a analizar un caso donde a la ecuación de Nicholson se le aplica un control que afecta su equilibrio. El modelo de nuestro estudio es el siguiente:

$$\begin{cases} N'(t) = -\alpha N(t) + pN(t-\tau)e^{-N(t-\tau)} + \beta u(t) \\ u'(t) = -\gamma u(t) + \delta N(t) \\ N(t) = \varphi(t),\ t \in [-\tau, 0] \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde u es un control diferenciable.
Se supone que los parámetros adicionales $\beta,\ \gamma,\ \delta$ son positivos, la función $\varphi \in C^1([-\tau, 0])$ es estrictamente positiva y $u_0 > 0$.
El equilibrio resulta ser:

$$N^* = \ln\left(\frac{\gamma p}{\alpha\gamma - \beta\delta}\right),\ u^* = \frac{\delta}{\gamma}N^*.$$

Este equilibrio es positivo si $\alpha\gamma > \beta\delta$ (esto incluso es necesario para que exista N^*) y $\gamma p > \alpha\gamma - \beta\delta$. Además probaremos bajo qué condiciones se asegura la estabilidad local de este equilibrio.
Los resultados más relevantes que se aprecian en este modelo son los siguientes.
Teorema 1: Las soluciones de este sistema son positivas y acotadas.

Vamos a probar la persistencia de las soluciones del sistema controlado (1).
Proposición: Si para algún $t \in (0; +\infty)$ se verifica que $N(t) < e^{-\alpha\tau}$ entonces $N(t-\tau) < 1$.
Teorema 2: La solución N de (1) verifica

$$\liminf_{t\to+\infty} N(t) > 0.$$

Teorema 3: Si $p > \alpha$, cualquier solución de (1), donde $u_0 > 0$ y $\varphi(t) > 0$ si $-\tau \leq t \leq 0$, satisface la siguiente desigualdad:

$$\liminf_{t\to+\infty} N(t) \geq \mu,\ \liminf_{t\to+\infty} u(t) \geq \frac{\delta\mu}{\gamma}$$

donde $\mu := \min\{\ln(\frac{p}{\alpha}), e^{-\tau\alpha}\}$.
Referencias.

1. Berezansky L., Braverman E. e Idels L. *Nicholson's blowflies differential equation revisited: main results and open problems*, Appl. Math. Model, 34 (2010) 1405-1417.

2. Amster P (2017). *Ecuaciones diferenciales con retardo.* Cursos y seminarios de matemática Serie B.

3. Gopalsamy, K. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics.* Kluwer Academic Publishers 1992.