Ecuaciones de Stokes con velocidad discontinua en el borde

Expositor: Ariel L. Lombardi (Universidad Nacional de Rosario, CONICET, ariel@fceia.unr.edu.ar)

Autor/es: Ricardo Durán (Universidad de Buenos Aires, IMAS (UBA - CONICET), rduran@dm.uba.ar); Lucia Gastaldi (Università degli Studi di Brescia (Italia), lucia.gastaldi@unibs.it); Ariel L. Lombardi (Universidad Nacional de Rosario, CONICET, ariel@fceia.unr.edu.ar)

El problema del flujo en una cavidad o *lid-driven cavity flow* se usa muchas veces para verificar la adecuación de distintos métodos de elementos finitos para aproximar las ecuaciones de Stokes o de Navier-Stokes. Se trata de un problema en un dominio Ω poligonal, con velocidad prescripta en el borde con discontinuidades en vértices que causan las principales dificultades tanto desde el punto de vista teórico como práctico. El dato de borde no está en $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ y como consecuencia la velocidad no es un campo de $H^1(\Omega)$ y por lo tanto la formulación variacional usual de las ecuaciones de Stokes deja de ser válida para este problema. Sin embargo, en la práctica, en las discretizaciones por elementos finitos, este inconveniente tiende a ser ignorado y se impone el dato de borde discontinuo directamente.

La existencia y unicidad de solución para el problema de Stokes en esta situación fue estudiada en [3] (ver también [2] para el caso tridimensional). En [1], usando solo regularidad en $W^{1,r}(\Omega)$ con $1 < r < 2$ y una regularización particular del dato de borde, se obtienen estimaciones de error para las discretizaciones por elementos finitos.

En nuestro caso, estamos interesados en las aproximaciones que se obtienen cuando la regularización del dato de borde es simplemente la interpolación de Lagrange del mismo, con alguna modificación sencilla en los puntos de discontinuidad (mediante un conveniente promedio, por ejemplo). Imponer esta regularización como condición de Dirichlet no implica, prácticamente, ningún costo adicional con respecto al caso de problemas regulares, y es posible obtener estimaciones de error casi óptimas en normas L^2 para la velocidad y H^{-1} para la presión. Nuestros resultados dependen de cotas bastante ajustadas del error en normas negativas $H^{-s}(\partial\Omega)$ entre el dato original y el aproximado, y de estimaciones casi uniformes, con respecto al parámetro de discretización, de la norma $H^{\frac{1}{2}}$ del dato aproximado (que es continuo y aproxima un campo discontinuo).

Referencias

[1] Z. Cai, Y. Wang. Math. Comp. 78 (2009) 771–787.

[2] E.B. Fabes, C.E. Kenig, G.C. Verchota. Duke Math. J. 57 (1988) 769–793.

[3] M. Hamouda, R. Temam, L. Zhang. Int. J. Numer. Anal. Modeling 14 (2017) 313–341.