Condiciones geométricas simples en elementos cuadriláteros para tener una estimación anisotrópica del error para el interpolador de Lagrange

Expositor: Gabriel Monzon (Universidad Nacional de General Sarmiento, gmonzon@ungs.edu.ar)

Autor/es: Gabriel Monzon (Universidad Nacional de General Sarmiento, gmonzon@ungs.edu.ar)

De acuerdo con [1], un cuadrilátero K es considerado una *perturbación de un rectángulo* si el mapeo F_K entre el cuadrado unitario $\widehat{K} = [0,1]^2$ y K está dado por

$$F_K(\widehat{x}, \widehat{y}) = P + (a\widehat{x}, b\widehat{y}) + \sum_{i=1}^{4} a^{(i)} \widehat{\phi}_i(\widehat{x}, \widehat{y}) \tag{1}$$

donde $P \in \mathbb{R}^2$, $b \leq a$, $\widehat{\phi}_i$ denota la función base asociada al vértice $\widehat{V}_i$ de $\widehat{K}$; y, para los vectores *distorsivos* $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$, existen constantes a_0, a_1, a_2 tales que

$$|a_i^{(j)}| \leq a_i b, \quad 0 \leq a_i \lesssim 1, \quad i = 1, 2, \ j = 1, \ldots, 4, \tag{2}$$

$$1/2 - aa_1/b - a_2 \geq a_0 > 0. \tag{3}$$

Para esta clase de elementos se obtuvo [1] la siguiente estimación anisotrópica del error

$$|u - Q_1 u|_{1,K} \leq C \left[a \, \|\partial_{x_1} \nabla u\|_{0,K} + b \, \|\partial_{x_2} \nabla u\|_{0,K} \right] \tag{4}$$

siendo C una constante uniforme ($Q_1 u$ denota la $\mathcal{Q}_1$-interpolada de Lagrange de u).

Los requerimientos (1)-(3) no tienen un claro sentido geométrico y su testeo no es una cuestión simple ni inmediata. Además, la estimación (4) no está escrita explícitamente en términos de los lados de K; más bien, involucra lados del rectángulo que es perturbado para obtener K.

En [3] se muestra que si un cuadrilátero K verifica la *doble condición del ángulo* (todo ángulo interior de K está lejos de 0 y π) y cumple la *propiedad de lados opuestos casi paralelos*, esto es, K se encuentra contenido en un paralelogramo determinado por dos de sus lados vecinos l_1 y l_2 de modo que $|l_2| \leq |l_1|$ y $1/2 + \epsilon \leq dist(P, l_1)/dist(P', l_1) \leq 1$ con $\epsilon \in (0, 1/2)$ donde P y $P' \in l_2$ son los vértices de K opuestos a l_1; entonces existe una constante C que cumple

$$|u - Q_1 u|_{1,K} \leq C \left[|l_1| \, \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{0,K} + |l_2| \, \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{0,K} \right]. \tag{5}$$

Si bien (5) presenta ventajas respecto a (4) ya que está enteramente escrita en términos de K, y las condiciones geométricas involucradas tienen una claro sentido geométrico y son simples de testear; la prueba de (5) se basa fuertemente en (4). Finalmente, en [2] se muestra que (5) vale para aquellos cuadriláteros que tienen el ángulo interior más grande acotado lejos de π y cuyos (pares de) lados opuestos tienen longitudes comparables. Más aún, (5) puede generalizarse para todo $p \geq 1$. Las condiciones anteriores resultan fáciles de interpretar geométricamente y son inmediatas de testear, además, la demostración dada en [2] es independiente de (4).

La charla tiene por objeto presentar los principales resultados de [2] y contar el enfoque usado para demostrarlos; no obstante, una breve reseña de los antecedentes citados parece adecuada.

[1] Apel T.: *Anisotropic finite elements: Local estimates and applications.* Adv. in Num. Math., B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig (1999).

[2] Monzón G.: *Anisotropic interpolation error estimate for arbitrary quadrilateral isoparametric elements.* Numer. Math. DOI 10.1007/s00211-019-01061-7 (2019).

[3] Monzón G.: *Estimación anisotrópica del error de interpolación sobre cuadriláteros: condiciones geométricas simples.* Trabajo aceptado en el volumen 7 de la revista MACI (2019).