Relación entre integrales singulares y pesos locales

Expositor: Federico Augusto Campos (IMAL (CONICET-UNL), fcampos@santafe-conicet.gov.ar)

Autor/es: Federico Augusto Campos (IMAL (CONICET-UNL), fcampos@santafe-conicet.gov.ar); Oscar Salinas (IMAL (CONICET-UNL), FIQ (UNL), salinas@santafe-conicet.gov.ar); Beatriz Viviani (IMAL (CONICET-UNL), FIQ (UNL), viviani@santafe-conicet.gov.ar)

Se considera en un espacio métrico (X, ρ), un abierto propio $\Omega \subset X$ y, para cada $\beta \in (0,1)$, una familia de bolas $\mathcal{F}_\beta = \{B(x,r) : x \in \Omega, 0 < r \leq \beta d(x,\Omega^c)\}$. El conjunto Ω estará provisto de una medida de Borel μ duplicante sobre $\mathcal{F}_\beta$. Para esta familia se toma la clase de pesos A_p^β, con $1 < p < \infty$, de funciones $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ para las cuales

$$\sup_{B \in \mathcal{F}_\beta} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w^{\frac{-1}{p-1}} d\mu\right)^{p-1} < \infty.$$

Se define $A_\infty^\beta = \underset{1<p<\infty}{\cup} A_p^\beta$. En este contexto se obtienen caracterizaciones de A_∞^β que usaremos para probar el teorema enunciado abajo. Con este propósito, se tomarán $X = \mathbb{R}^n$, $\rho = |\cdot|$, $d\mu = dx$, y se definirán los conjuntos de tipo local

$$S_\beta(B) = \underset{x \in B}{\cup} B(x, \beta d(x,\Omega^c)) \ \text{ t, } \ E_\beta(B) = \underset{x \in B}{\cap} B(x, \beta d(x,\Omega^c)),$$

para $B \in \mathcal{F}_\beta$. Así mismo, introduciremos la clase de pesos $B_{p,\beta}$ ($1 < p < \infty$) dada por

$$w \in B_{p,\beta} \ \text{ si y sólo si } \sup_{B(\xi,r) \in \sqcup\sqcup \mathcal{F}_\beta} \frac{|B(\xi,r)|^p}{\int_{B(\xi,r)} w \, dx} \int_{S_\beta(B(\xi,r)) - B(\xi,r)} w(x)|x-\xi|^{-np} dx < \infty \ .$$

Se estudiarán operadores locales de tipo integral singular de la forma

$$T_{\beta,\eta} f(x) = vp \int_\Omega K(x,y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\beta t d(x,\Omega^c)}\right) f(y) dy \ ,$$

para $x \in \Omega$, donde K es un núcleo estándar y η una función $\mathcal{C}^\infty$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$ con soporte en $B(0,1)$.

El resultado principal es el siguiente

Teorema: Dados $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$, $T_{\beta,\eta}$ operador de integral singular local, si $w \in A_\infty^\beta \cap B_{p,\beta}$ entonces existe $C > 0$ tal que, para cualquier f que satisface $\frac{f}{w} \in L^\infty(\Omega)$, se tiene $\int_B |T_{\beta t,\eta} f(x) - m_B T_{\beta,\eta} f| \, dx \leq C \|\frac{f}{w}\|_\infty \int_B w \, dx$ si $B \in \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}$, y $\int_B |T_{\beta,\eta} f(x)| \, dx \leq C \|\frac{f}{w}\|_\infty \int_B w \, dx$ si $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}$, donde $m_B g = \frac{1}{|B|} \int_B g \, dx$. Recíprocamente, si existe $C > 0$ tal que, para cualquier f que satisface $\frac{f}{w} \in L^\infty(\Omega)$, y para cada $j = 1, \ 2, \ \ldots, n$, se tiene $\int_B |R_j^{t\beta,\eta} f(x) - m_B R_j^{\beta,\eta} f| \, dx \leq C \|\frac{f}{w}\|_\infty \int_B w \, dx$ si $B \in \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}$, y $\int_B |R_j^{\beta,\eta} f(x)| \, dx \leq C \|\frac{f}{w}\|_\infty \int_B w \, dx$ si $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\frac{\beta}{2}}$, donde $R_j^{\beta,\eta}$ es la j-ésima transformada de Riesz local, entonces $w \in A_\infty^\beta \cap B_{1+\frac{1}{n},\beta}$.