Propiedades geométricas en la esfera y el espacio proyectivo asociado a una C^*-álgebra con un estado fiel.

Expositor: Andrea Carolina Antunez (Univ. Nac. de General Sarmiento, Univ. Austral , aantunez@ungs.edu.ar)
Autor/es: Andrea Carolina Antunez (Univ. Nac. de General Sarmiento, Univ. Austral , aantunez@ungs.edu.ar)

Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unital, 1 unidad en $\mathcal{A}$ y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un estado fiel sobre $\mathcal{A}$. Definimos la esfera en $\mathcal{A}$ asociada a φ como el conjunto:

$$S_\varphi := \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x^*x) = 1\}$$

Luego, el espacio proyectivo de $\mathcal{A}$ se define por el cociente $\mathbb{P}_\varphi = \mathbb{S}_\varphi / \sim$ donde $x \sim x'$ si existe $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ tal que $x' = \lambda x$.

En el presente trabajo, se mostrarán algunas características geométricas particulares de estos conjuntos como variedades diferenciales infinito dimensionales y como espacios homogéneos del grupo de operadores

$$U_\varphi(\mathcal{A}) = \{G \in Gl(\mathcal{A}) : \varphi((Gx)^*Gy) = \varphi(x^*y)\}$$

bajo la acción $\pi(G, x) = G(x)$, $G \in U_\varphi(\mathcal{A})$. Un operador acotado $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es adjuntable si existe $T^\sharp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ acotado tal que $\varphi((Tx)^*y) = \varphi(x^*(T^\sharp y)$. Por lo cual, $G \in U_\varphi(\mathcal{A})$ si y sólo si $G^\sharp = G^{-1}$. En particular, $U_\varphi(\mathcal{A})$ es un grupo de Lie-Banach. Estos operadores juegan un rol importante en el estudio de operadores en espacios de Banach con dos normas, desarrollada inicialmente por M.G. Krein [1] y P. Lax [2].

Definiremos una métrica en $\mathbb{P}_\varphi$ y la analizaremos usando algunos hechos conocidos del estudio de variedades Grassmanianas infinito-dimensionales (ver [3]). En particular, probaremos la existencia de geodésicas minimales, tanto con datos iniciales dados como con puntos extremales fijos.

Referencias:

[1] Krein M. G., Compact linear operators on functional spaces with two norms, Translated from the Ukranian (Dedicated to the memory of Mark Grigorievich Krein 1907–1989), Integral Equations Operator Theory 30, 1998, no. 2, 140-162.

[2] Lax P. D., Symmetrizable linear transformations, Comm. Pure Appl. Math. 7, 1954, 633-647.

[3] Porta H., Recht L., Minimality of geodesics in Grassmann manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 100, 1987, no. 3, 464-466.