La energía de la sección compleja normal de la 2-grassmaniana asociada al producto cruz triple

Expositor: Ruth Paola Moas (FaMAF-CIEM (Universidad Nacional de Córdoba, Conicet), pmoas@famaf.unc.edu.ar)
Autor/es: Ruth Paola Moas (FaMAF-CIEM (Universidad Nacional de Córdoba, Conicet), pmoas@famaf.unc.edu.ar); Marcos Salvai (FaMAF-CIEM (Universidad Nacional de Córdoba, Conicet), salvai@famaf.unc.edu.ar)

Sea $G(k,n)$ la grassmanniana de los subespacios orientados de dimensión k de $\mathbb{R}^n$. Consideramos aplicaciones que asignan a cada $P \in G(2,8)$ una estructura compleja ortogonal $J(P)$ en $P^{\perp}$. Una tal asignación se puede pensar como una sección del subfibrado esférico unitario $\Pi : E^1 \to G(2,8)$ del fibrado vectorial riemanniano $E \to G(2,8)$, donde

$$E = \{(P,T) \mid P \in G(2,8) \text{ y } T \in \mathrm{Skew}_P\left(\mathbb{R}^8\right)\}$$

con $\mathrm{Skew}_P\left(\mathbb{R}^8\right) = \left\{T \in \mathrm{End}\ \left(\mathbb{R}^8\right) \mid T|_P = 0 \text{ y } T \text{ es antisimétrica}\right\}$, que posee una conexión métrica canónica ∇ (el producto interno en cada fibra es el usual: $\langle S,T\rangle = -\ \mathrm{tr}\ (ST)$).

La funcional combadura total está definida para secciones $\mathfrak{J}$ del fibrado $\Pi : E^1 \to G(2,8)$ mediante

$$\mathcal{B}(\mathfrak{J}) = \int_{G(2,8)} \|\nabla \mathfrak{J}\|^2 .$$

Esta funcional mide cómo $\mathfrak{J}$ se aparta de ser paralela y difiere inesencialmente de la funcional energía $\mathcal{E}$, que se aplica a cualquier mapeo suave de $G(2,8)$ en E^1 (no necesariamente a secciones) y cuyos puntos críticos son las aplicaciones armónicas. Los puntos críticos de $\mathcal{B}$ se denominan secciones verticalmente armónicas.

Sea $\mathbb{O}$ el álgebra normada de los octoniones y sea $X : \mathbb{O}^3 \to \mathbb{O}$ el producto cruz triple. Nuestro trabajo se centra en probar que la sección $\mathfrak{J}$ definida en [2] mediante

$$\mathfrak{J} : G(2,8) \to E^1, \qquad \mathfrak{J}(u \wedge v) = (u \wedge v, J_{u\wedge v})$$

es verticalmente armónica, donde $J_{u\wedge v}(w) = X(u,v,w)$. Esto generaliza parcialmente, en cierto sentido, resultados conocidos sobre la energía de estructuras casi complejas en la esfera $S^6 \cong G(1,7)$ para la estructura canónica dada por el producto cruz octoniónico estándar (comparar con [1]).

[1] G. Bor, L. Hernández-Lamoneda, M. Salvai, *Orthogonal almost-complex structures of minimal energy*, Geom. Ded. **127** (2007) 75–85.

[2] T. Fei, *Stable forms, vector cross products and their applications in geometry*, arXiv:1504.02807v2 [math.DG].