Una relación entre polinomios de valor mínimo y torres de cuerpos de funciones sobre cuerpos finitos

Expositor: Ricardo Toledano (Universidad Nacional del Litoral, ridatole@gmail.com)
Autor/es: Ricardo Toledano (Universidad Nacional del Litoral, ridatole@gmail.com)

Sea $S \subset \mathbb{F}_q$ un conjunto no vacío y sea f un polinomio sobre $\mathbb{F}_q$ de grado m. Decimos que f es un S-polinomio si

$$\{\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_q : f(\alpha) = \beta^m\} \subset S,$$

para todo $\beta \in S$. Definimos el conjunto

$$V_f^S = \{f(a) : a \in S\},$$

y decimos que f es un polinomio de S-valor mínimo si se cumple que

$$|V_f^S| = \left\lceil \frac{|S|}{m} \right\rceil .$$

En este trabajo veremos que todo polinomio sobre $\mathbb{F}_q$ de grado m que sea un S-polinomio es también un polinomio de S-valor mínimo siempre que $q \equiv 1 \mod m$ y que $0 \in S$. En particular este resultado implica que si se tiene una torre recursiva de cuerpos de funciones con ramificación moderada definida por una ecuación de la forma

$$y^m = x^d h(x),$$

donde $q \equiv 1 \mod m$, $h(0) \neq 0$ y $\operatorname{mcd}(m, d) = 1$ y se cumplen las condiciones impuestas por Garcia, Stichtenoth y Thomas en su trabajo sobre torres asintóticamente buenas, entonces el polinomio $f = x^d h(x)$ es un polinomio de S-valor mínimo para un cierto $S \subset \mathbb{F}_q$ tal que $V_f^S = V_{x^m}^S$. Este resultado permite hallar una gran variedad de nuevos ejemplos de torres asintóticamente buenas sobre $\mathbb{F}_q$ con ramificación moderada.