Representaciones Fieles del Álgebra de Lie 2-pasos Nilpotente libre de rango r

Expositor: Nadina Rojas (FCEFyN-UNC, nadina.rojas@unc.edu.ar)
Autor/es: Leandro Cagliero (FaMAF-UNC, cagliero@famaf.unc.edu.ar); Nadina Rojas (FCEFyN-UNC, nadina.rojas@unc.edu.ar)

Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica cero. Sean

$$\mu(\mathfrak{n}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{n}\} \text{ y}$$

$$\mu_{nil}(\mathfrak{n}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una nilrepresentación fiel de } \mathfrak{n}\}$$

Denotamos por $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ el centro de $\mathfrak{n}$, si $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \subseteq [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ obtenemos que $\mu(\mathfrak{n}) = \mu_{nil}(\mathfrak{n})$ (ver [CR, Theorem 2.4]). En general no es fácil determinar el valor de este invariante, aún para una dada álgebra de Lie. Más aún, para muy pocas familias de álgebras de Lie se conoce el valor de μ (ver por ejemplo [BM1], [CR], [Ro1], [Ro2], [S]).

Sea $r \in \mathbb{N}$, el álgebra de Lie libre 2-pasos nilpotente de rango r es el espacio vectorial $\mathcal{L}_r = \mathbb{K}^r \oplus \bigwedge^2 \mathbb{K}^r$ de dimensión $r + \frac{r(r-1)}{2}$, equipada con la estructura de álgebra de Lie $[X, Y] = X \wedge Y$ para todo $X, Y \in \mathbb{K}^r$. Es fácil ver que $\mathfrak{z}(\mathcal{L}_r) = [\mathcal{L}_r, \mathcal{L}_r]$, por lo tanto $\mu(\mathcal{L}_r) = \mu_{nil}(\mathcal{L}_r)$. Por otra parte, se puede ver que $\mathcal{L}_r$ es el nil-radical de una subálgebra parabólica del álgebra de Lie semisimple de rango r de tipo B. La representación fiel de $\mathcal{L}_r$ que se obtiene al ser representada de esta manera tiene dimensión $2r + 1$. Esto muestra que $\mu(\mathcal{L}_r) \leq 2r + 1$. En este trabajo probamos el siguiente teorema:

Teorema. *Sean $r \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{L}_r$ el álgebra de Lie libre 2-pasos nlpotente de rango r. Entonces*

(1) $\mu(\mathcal{L}_r) = \left\lceil \sqrt{\frac{r(r-1)}{2}} \right\rceil + 2$ *para todo* $r \geq 5$ *y*

(2) $\mu(\mathcal{L}_r) = 2r - 1$ *para* $r = 2, 34$.

Referencias

[BM1] D. Burde, W. Moens, *Minimal Faithful Representations of Reductive Lie Algebras*, Archiv der Mathematik.,Vol. **89**, No. 6, (2007), 513–523.

[CR] L. Cagliero, N. Rojas, *Faithful representation of minimal dimension of current Heisenberg Lie algebras*, Int. J. Math. Vol. **20** (11), (2009), 1347–1362.

[Ro1] N. Rojas, *Minimal Faithful Representation of the Heisenberg Lie algebra with abelian factor*, J. of Lie Theory, Vol. **23**(4) (2013), 1105–1114.

[Ro2] N. Rojas, *Faithful Representations of Minimal Dimension of 6-dimensional nilpotent Lie algebras*, J. Algebra Appl., Vol. **15**(10) (2016), 1650191(1)-171650191(19).

[S] I. Schur, *Zur Theorie vertauschbarer Matrizen*, J. Reine Angew. Mathematik , **130** (1905), 66–76.