Polinomios no negativos en una franja de $\mathbb{R}^2$

Expositor: Paula Micaela Escorcielo (Universidad de Buenos Aires, pescorcielo@dm.uba.ar)
Autor/es: Paula Micaela Escorcielo (Universidad de Buenos Aires, pescorcielo@dm.uba.ar); Daniel Perrucci (Universidad de Buenos Aires, perrucci@dm.uba.ar)

Sean $p_1, \cdots, p_s \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ y $S \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \cdots, p_s(x) \geq 0\}.$$

Sea $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $f \geq 0$ en S. Un certificado de no negatividad de f en S es una expresión algebraica que pone en evidencia ese hecho. Por ejemplo, escribir a un polinomio como suma de polinomios al cuadrado es un certificado de la no negatividad del polinomio en todo $\mathbb{R}^n$.

Uno de los resultados más importantes en torno a este problema es el Schmüdgen Positivstellensatz que asegura que si S es compacto, entonces todo polinomio positivo en S pertenece a T, el preordering generado por $p_1, \ldots, p_s$. Por otro lado, en cuanto al estudio de los polinomios no negativos en S, se sabe que si S tiene dimensión mayor o igual a 3 o contiene un cono afín de dimensión 2, existen polinomios no negativos en S que no pertenecen a T. Luego de conocerse estos resultados, el foco pasó a estar puesto en los conjuntos semialgebraicos de dimensión 2 que no contienen conos afines, en particular, el caso de una franja en $\mathbb{R}^2$ fue el más estudiado.

En el año 2010, M. Marshall dió una respuesta a este problema, probando que todo polinomio $f \in \mathbb{R}[X, Y]$, no negativo en el conjunto $[0, 1] \times \mathbb{R}$ (definido por la desigualdad $X(1 - X) \geq 0$) pertenece al preordering generado por $X(1-X)$. Es decir, para un tal f, existe una reescritura de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{k} g_i^2 + \sum_{j=1}^{l} h_j^2 X(1 - X) \tag{1}$$

con g_i, $h_j \in \mathbb{R}[X, Y]$. La demostración desarrollada por Marshall no es constructiva y tampoco da información sobre cotas de grado para los polinomios que intervienen en la reescritura (1).

En esta charla daremos, bajo ciertas hipótesis adicionales, una demostración constructiva que permite obtener cotas de grado.