El problema de Waring en cuerpos finitos y grafos generalizados de Paley

Expositor: Denis E. Videla (Universidad Nacional de Córdoba, denisv458@gmail.com)
Autor/es: Denis E. Videla (Universidad Nacional de Córdoba, denisv458@gmail.com); Ricardo Podestá (Universidad Nacional de Córdoba, podesta@famaf.unc.edu.ar)

El problema de Waring clásico, introducido por Edward Waring, pregunta si dado $k \in \mathbb{N}$, existe un número $g(k)$ tal que todo natural puede ser escrito como la suma de a lo más un número $g(k)$ de k-ésimas potencias. Por ejemplo $g(1) = 1$, $g(2) = 4$ y $g(3) = 9$. tEste último hecho fue probado por Hilbert en 1909 y desde entonces es conocido como el Teorema de Hilbert-Waring. t t t tEn el contexto de cuerpos finitos, dado un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ y un entero $k \mid q-1$, el problema es decidir si es posible expresar cada elemento del cuerpo como una suma de potencias k-ésimas en el cuerpo. En este caso, el número de Waring $g(k, q)$ es el menor valor s tal que todo elemento de $\mathbb{F}_q$ es una suma de a lo más una cantidad s de potencias k-ésimas de elementos del cuerpo. tEste es un problema abierto que sólo ha sido resuelto para algunas familias de parámetros. Más aún, la obtención de buenas cotas es también satisfactorio. t t t tHay tres métodos generales para calcular ó estimar $g(k, q)$: combinatoria aditiva, sumas exponenciales y métodos de Lattice. Aquí proponemos una nueva estrategia, mostrando que el cálculo del número de Waring es equivalente al cálculo del diámetro de cierto grafo de Cayley definido sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_q$, los llamados *grafos generalizados de Paley*. En esta charla veremos cómo a partir de caracterizaciones de estos grafos es posible calcular el número de Waring en algunos casos no conocidos; luego presentamos una fórmula exacta de reducción de tipo $g(k_b, q^b) = bg(k, q)$ donde k_b depende de k, b y q; por último mostraremos una nueva cota inferior para $g(k, q)$ en el caso de que q es primo. t t t tEsta charla es parte de un trabajo en curso conjunto con Ricardo Podestá.