Descomposición exacta de polinomios como sumas de cuadrados

Expositor: Santiago Jorge Laplagne (Universidad de Buenos Aires, slaplagn@dm.uba.ar)
Autor/es: Santiago Jorge Laplagne (Universidad de Buenos Aires, slaplagn@dm.uba.ar); Jose Capco (University of Innsbruck, jose.capco@uibk.ac.at); Claus Scheiderer (University of Konstanz, claus.scheiderer@uni-konstanz.de)

Decidir si un polinomio dado puede escribirse como suma de cuadrados y calcular la descomposición es un problema fundamental de la geometría algebraica real. En nuestro trabajo nos enfocamos en el problema de determinar cuándo un polinomio racional que puede descomponerse como suma de cuadrados de polinomios reales ($\mathbb{R}$-SOS) puede descomponerse también como suma de cuadrados de polinomios racionales ($\mathbb{Q}$-SOS). Los primeros ejemplos negativos (es decir, polinomios racionales que son $\mathbb{R}$-SOS pero no $\mathbb{Q}$-SOS) fueron encontrados por C. Scheiderer [5]. En ese trabajo el autor da una caracterización completa de todos los ejemplos negativos para el caso de polinomios de grado 4 en 3 variables (que notamos caso (3,4)). En particular, todos los posibles ejemplos son sumas de dos cuadrados con coeficientes en una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ de grado par. En [4] se presenta un nuevo ejemplo negativo, dado por un polinomio de grado 6 en 4 variables (caso (4,6)), con coeficientes en una extensión de $\mathbb{Q}$ de grado impar. El ejemplo fue encontrado utilizando elecciones arbitrarias de polinomios y la demostración utiliza técnicas computacionales difíciles de extender a familias de polinomios. Se plantea entonces como pregunta interesante estudiar los casos intermedios de polinomios de grado 6 en 3 variables y grado 4 en 4 variables (es decir, los casos (3,6) y (4,4)). El estudio general de los conos de polinomios no–negativos y sumas de cuadrados en esos casos ha despertado últimamente un gran interés (ver por ejemplo [1], [2] y [3]). Siguiendo la construcción en [4], encontramos nuevos ejemplos de polinomios racionales no–negativos que son $\mathbb{R}$-SOS pero no $\mathbb{Q}$-SOS para ambos casos. Más aún, demostramos mediante argumentos teóricos más generales que estos ejemplos no admiten una descomposición racional, y que la descomposición es única (salvo transformaciones ortogonales). Esto nos permite extender los resultados a nuevas familias de ejemplos, perturbando los coeficientes y utilizando distintas extensiones algebraicas de $\mathbb{Q}$ de grado 3.

Trabajo en progreso.

Referencias

[1] Grigoriy Blekherman, *Nonnegative polynomials and sums of squares*, Semidefinite optimization and convex algebraic geometry, MOS-SIAM Ser. Optim., vol. 13, SIAM, Philadelphia, PA, 2013, pp. 159–202.

[2] Grigoriy Blekherman, Jonathan Hauenstein, John Christian Ottem, Kristian Ranestad y Bernd Sturmfels, *Algebraic boundaries of Hilbert's SOS cones*, Compos. Math. **148** (2012), no. 6, 1717–1735.

[3] Jose Capco y Claus Scheiderer, *Two remarks on sums of squares with rational coefficients*, arXiv e-prints (2019), arXiv:1905.13282.

[4] Santiago Laplagne, *Facial reduction for exact polynomial sum of squares decompositions*, Mathematics of Computation (2018), to appear.

[5] Claus Scheiderer, *Sums of squares of polynomials with rational coefficients*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **18** (2016), no. 7, 1495–1513.