Degeneraciones de las álgebras de Lie reales simplécticas de dimensión 4

Expositor: Silvina Ruth Gomez (FACET-UNT, sgomez@herrera.unt.edu.ar)
Autor/es: Silvina Ruth Gomez (FACET-UNT, sgomez@herrera.unt.edu.ar); Nadina Rojas (FaCEFyN-UNC, nadina.rojas@unc.edu.ar)

Definición. Un álgebra de Lie real simpléctica es una terna $(\mathbb{R}^{2n}, \mu, \omega)$ tal que $(\mathbb{R}^{2n}, \mu)$ es un álgebra de Lie y $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ una 2-forma, no degenerada tal que

$$\omega(\mu(X,Y),Z) + \omega(\mu(Z,X),Y) + \omega(\mu(Y,Z),X) = 0 \qquad \forall X,Y,Z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Denotemos por C^2 al conjunto de los mapeos bilineales y alternantes de $\mathbb{R}^{2n}$ en $\mathbb{R}^{2n}$ y por $\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ la 2-forma simpléctica standard de $\mathbb{R}^{2n}$

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i \wedge e_{n+i}.$$

Sea $W = \left\{\mu \in C^2 : \omega_0(\mu(X,Y),Z) + \omega_0(\mu(Z,X),Y) + \omega_0(\mu(Y,Z,X)) = 0\right\}$, subespacio vectorial de C^2, y $S(\mathbb{R})$ el subconjunto de W tal que $(\mathbb{R}^{2n}, \mu, w_0)$ es un álgebra de Lie real simpléctica.

El grupo simpléctico $Sp(2n,\mathbb{R})$, actúa sobre $S(\mathbb{R})$ por *cambio de base* y el conjunto de órbitas $S(R)/SP(2n,R)$ parametriza las álgebras de Lie simplécticas de dimensión $2n$ (salvo simplectomorfismo).

De manera análoga a lo que ocurre en el estudio de otras *variedades de álgebras*, podemos estudiar las nociones de rígidez y degeneraciones en el conjunto $S(\mathbb{R})$: dadas dos álgebras de Lie simplécticas $\mu_1, \mu_2 \in S(\mathbb{R})$ decimos que μ_1 se *degenera* en μ_2, y lo denotamos por $\mu_1 \longrightarrow \mu_2$, si $\mu_2 \in \overline{Sp(2n,\mathbb{R}) \cdot \mu_1}$ donde $\overline{Sp(2n,\mathbb{R}) \cdot \mu_1}$ es la clausura de la $Sp(2n,\mathbb{R})$-órbita de μ_1 con respecto de la topología euclídea de C^2. Decimos que un álgebra de Lie simpléctica μ es *rígida*, si la $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$-órbita de μ_1 es un conjunto abierto de $S(\mathbb{R})$, con respecto a la topología heredada de C^2. Por último, diremos que el álgebra de Lie simpléctica $(\mathbb{R}^{2n}, \mu, \omega_0)$ es *minimal* si la $Sp(2n,\mathbb{R})$-órbita de μ es cerrada.

Ovando en [Ov], clasificó las álgebras de Lie reales simplécticas de dimensión 4. En esta charla, basados en dicha clasificación, estudiaremos los conceptos dados anteriormente.

Referencias

[Ov] G. Ovando, *Four Dimensional Symplectic Lie Algebras*, Beiträge zur Algebra und Geometrie-Contributions to Algebra and Geometry, Vol. **47**, No. 2, (2006), 419–434.