6. Ecuaciones Diferenciales

Organizan: Pablo De'Nápoli - Rubén Spies

Autores: Tomás Godoy, Uriel Kaufmann y Sofía Paczka
Lugar: FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba
Expositor: Uriel Kaufmann

Problemas no lineales con sub y supersoluciones no ordenadas

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio suave y acotado, sea L un operador parabólico lineal de segundo orden con coeficientes T-periódicos, sean a, b dos funciones T-periódicas acotadas y no negativas, y sea $0 < q < 1$. Estudiamos existencia y no existencia de soluciones no negativas (y no triviales) de problemas periódicos parabólicos semilineales de la forma

$$(*) \begin{cases} Lu = \lambda a\,(x,t)\,u - b\,(x,t)\,u^q := h\,(x,t,u) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica}, & \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro real. Discutimos asimismo propiedades cualitativas de las soluciones. Las principales herramienta utilizadas son una extensión de un teorema de [DO] acerca de sub y supersoluciones "no ordenadas.ªsí como diversos resultados sobre problemas lineales con peso de signo indefinido contenidos en [GK] y [GK2]. Cabe mencionar que problemas de la forma $Lu = f\,(x,t,u)$ en $\Omega \times \mathbb{R}$ han sido ampliamente estudiados con diversos métodos, ver por ejemplo los libros [DK] y [H]. Por otro lado, vale la pena resaltar que al ser $s \to h\,(.,s)\,/s$ creciente, es fácil comprobar (al menos en muchas situaciones) que no pueden existir sub y supersoluciones "bien ordenadas"(o sea, la subsolución menor que la supersolución) y por tantos los teoremas clásicos no son aplicables a $(*)$. Por último, agregamos que todos los resultados permanecen válidos para los correspondientes problemas elípticos. En particular, se generalizan los resultados conocidos tanto en el caso elíptico (ver por ejemplo [DH], [P]) como en el caso parabólico (ver por ejemplo [H]).

Referencias

[DK] D. Daners, P. Koch-Medina, *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, Longman Research Notes **279,** 1992.

[DO] C. De Coster, P. Omari, *Unstable periodic solutions of a parabolic problem in the presence of non-well-ordered lower and upper solutions*, J. Funct. Anal. **175** (2000), 52-88.

[DH] J.-P. Dias, J. Hernández, *Bifurcation à l'infini et alternative de Fredholm pour certains problèmes unilateraux*, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 189-205.

[GK] T. Godoy, U. Kaufmann, *On principal eigenvalues for periodic parabolic problems with optimal condition on the weight function,* J. Math. Anal. Appl. **262** (2001), 208-220.

[GK2] T. Godoy, U. Kaufmann, *On positive solutions for some semilinear periodic parabolic eigenvalue problems*, J. Math. Anal. Appl. **277** (2003), 164-179.

[H] P. Hess, *Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity*, Longman Research Notes **247,** 1992.

[P] A. Porretta, *A note on the bifurcation of solutions for an elliptic sublinear problem*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **107** (2002), 153-164.

Autores: Pablo Amster y Alberto Déboli
Lugar: Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos
Expositor: Alberto Déboli

Condiciones de Landesman-Lazer para no-linealidades que dependen de los valores de borde

El proceso de difusión de dos iones con idénticas valencias a través de un líquido que fluye sobre una membrana eléctricamente neutra en los reservorios, se modeliza mediante un problema de valores de contorno con condiciones de Neumann homogéneas del tipo

$$\begin{cases} y'' = y\left\{\lambda - \frac{y_0^2-y^2}{2} + \left(l\lambda + \frac{y_0^2-y_1^2}{2}\right)x - \left(l\lambda + \frac{y_0^2-y_1^2}{2}\right)\right\}D \\ \quad = f(x,y(x),y(0),y(1)) \quad y'(0)=y'(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

donde $y_0 = y(0)$, $y_1 = y(1)$ y las constantes $l > 0$, $\lambda > 0$, $D \in (-1,1)$ son parámetros físicos, tales como el coeficiente de difusión. [2,3]

La particularidad de este problema es que la no linealidad depende de los valores de la solución sobre el borde, obviamente desconocidos. Usando teoría de grado y el método de sub y super soluciones ordenadas Thompson [2,3] demuestra existencia de al menos una solución positiva para $D > 0$ y bajo la hipótesis

$$\lambda \geq 2l\left(1 - \frac{1}{(1+l)^2}\right)D^2. \tag{2}$$

En un trabajo reciente Amster, Kwong y Rogers [1] han demostrado, utilizando un argumento de shooting 2-dimensional, que la restricción de los parámetros (2) puede ser eliminada.

En este trabajo planteamos un sistema de primer orden que permite abordar problemas del tipo (2) para f en general; más específicamente usando grado de Leray-Schauder demostramos un teorema de continuación a partir del cual se demuestra existencia de solución para funciones f acotadas que satisfacen una condición de Ladesmann-Lazer

$$\int_0^1 f^-(x)dx < 0 < \int_0^1 f^+(x)dx \quad \text{o} \quad \int_0^1 f^-(x)dx > 0 > \int_0^1 f^+(x)dx$$

donde

$$\lim_{x\pm\infty} f(x, s+A, s, s+B) = f^{\pm}(x)$$

pera $x \in [0,1]$ uniformemente en $|A|, |B| \leq ||f||_\infty$

Finalmente demostramos un teorema de existencia para funciones f que satisfacen una condición de Ladesmann-Lazer no asintótica y para funciones acotadas de un solo lado o de crecimiento a lo sumo lineal.

Referencias

[1] Amster P., Kwong M. K. y Rogers C. On a Neumann Boundary Value Problem for Painlevé II in Two Ion Electro-Diffusion. (Submitted).

[2] Thompson B. H. Existence for a Two-Point Boundary Value Problem Arising in Electrodiffusion. Acta Mathematica Scientia 8 (1988), 4, 373-387.

[3] Thompson B. H. Existence for Two-Point Boundary Value Problems in Two Ion Electrodiffusion. Journal of Mathematical analysis and Applications 184 82-94 (1994)

Autores: Pablo Amster y Julián Haddad
Lugar: Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires
Expositor: Julián Haddad

Generalización a sistemas de un teorema de Lazer para una ecuación resonante

En un artículo de 1968 [1], Lazer probó que la ecuación escalar no lineal de segundo orden

$$u'' + g(u) = p(t) \qquad 0 < t < T$$

bajo condiciones periódicas

$$u(0) = u(T), \qquad u'(0) = u'(T)$$

para p continua tiene al menos una solución cuando g es continua, sublineal y satisface la siguiente condición:

$$g(u).u \geq 0.$$

Cuando la desigualdad es estricta, este resultado admite una generalización apropiada para el caso de un sistema de ecuaciones (ver por ejemplo [2]), empleando la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach.

Sin embargo, en el caso no estricto las soluciones no están acotadas a priori, lo que impide la aplicación directa de los métodos de continuación de Leray-Schauder. Para el caso escalar, esta dificultad puede evitarse perturbando la ecuación y empleando el teorema de Arzelá-Ascoli a fines de obtener una sucesión de soluciones aproximadas que converge a una solución.

En este trabajo mostraremos que este procedimiento no siempre puede extenderse para sistemas de ecuaciones, y presentaremos algunas situaciones en donde tal extensión es posible. Para estos casos, además, empleando la invariancia por homotopía del grado de Leray-Schauder probaremos que el uso del teorema de Arzelá-Ascoli puede evitarse.

Referencias

[1] A. C. Lazer, On Schauder's Fixed point theorem and forced second-order nonlinear oscillations, J. Math. Anal. Appl. 21 (1968) 421-425.

[2] D. Ruiz and J. R. Ward, Some notes on periodic systems with linear part at resonance, Discrete and Continuous Dynamical Systems 11 (2004), 337-350.

Conferencia Invitada
Pablo Amster
Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

Un método de shooting bidimensional para un problema de Neumann no lineal

Algunos modelos recientes de la teoría de electrodifusión han llevado a considerar problemas no lineales de segundo orden del tipo

$$y''(x) = f(t, y(x), y(0), y(1))$$

con condiciones de Neumann

$$y'(0) = y'(1) = 0.$$

En [1], se ha estudiado un caso general, en el que f satisface condiciones del tipo Landesman-Lazer. Sin embargo, dichas condiciones no se cumplen para la no-linealidad dada por

$$f(x, y, y_0, y_1) := y \left\{ \lambda - \frac{y_0^2 - y^2}{2} + \left(l\lambda + \frac{y_0^2 - y_1^2}{2} \right) x - \left(l\lambda + \frac{y_0^2 - y_1^2}{2} \right) \right\} D,$$

para la cual se ha demostrado en [3] la existencia de soluciones positivas bajo la siguiente restricción en los parámetros físicos $l, \lambda > 0$ y $D \in (0, 1)$:

$$\lambda \geq 2l \left(1 - \frac{1}{(1+l)^2} \right) D^2.$$

El motivo esencial de esta restricción radica en la dificultad de obtener cotas a priori de las soluciones, lo que impide la aplicación directa de los métodos de continuación de Leray-Schauder.

En esta charla se presenta el principal resultado de [2], en el que se prueba la existencia de soluciones eliminando la anterior restricción. La demostración se basa en un método de shooting bidimensional, que permite reducir el problema a la obtención de un cero de una aplicación continua $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Mediante una serie de acotaciones, y empleando un resultado de desigualdades diferenciales, se muestra que el grado de Brouwer de T sobre una región apropiada es distinto de cero, de donde se concluye que el problema tiene al menos una solución.

Referencias

[1] P. Amster, A. Déboli. *A Neumann problem arising on a two ion electro-diffusion model.* Preprint.

[2] P. Amster, M. K. Kwong, C. Rogers. *On a Neumann Boundary Value Problem for Painlevé II in Two Ion Electro-Diffusion.* Enviado.

[3] H. B. Thompson. *Existence for Two-Point Boundary Value Problems in Two Ion Electrodiffusion.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 184 (1994), 82-94.

Autores: J. Bonder, P. Pinasco y A. Salort
Lugar: Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires
Expositor: Ariel Salort

Distribución asintótica de autovalores en dominios de medida infinita

En el trabajo enunciamos y demostramos teoremas referidos al estudio de la distribución asintótica de autovalores del problema de autovalores del p-laplaciano en $\Omega \subset R$ con condiciones de contorno Dirichlet en $\partial\Omega$, y $1 < p < +\infty$:

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda|u|^{p-2}u$$

Los lemas necesarios fueron planteados desde un punto de vista de la teoría de números y aplicados particularmente para resolver el problema nombrado. En [5] y en [3] se resuelve el problema citado para un dominio $\Omega \subset R$ para el cual $|\Omega|_1 = \sum_{j=0}^{\infty} = j^{-1/d}$, donde d es el contenido de Minkowski de $\partial\Omega$ y se concluye que

$$N(\lambda) = \#\{j \in N : \lambda_j \leq \lambda\} = \pi_p^{-1}|\Omega|\lambda^{1/p} + \pi_p^{-d}\zeta(d)\lambda^{1/p} + o(\lambda^{1/p})$$

Nosotros generalizamos el resultado para dominios tales que $|\Omega|_1 = \sum_{j=0}^{\infty} = g(j)$ con $h \in G_d$ una familia de funciones con $g(x) := h^{-1}(1/x)$, $f(x) := h(1/x)^{-1}$. Y consideramos los casos en que el dominio es de medida finita e infinita. Los resultados obtenidos son para Ω de medida finita, si $0 < d < 1$

$$N(\lambda) = \#\{j \in N : \lambda_j \leq \lambda\} = \pi_p^{-1}|\Omega|\lambda^{1/p} + \pi_p^{-d}\zeta(d)f(\lambda^{1/p}) + o(f(\lambda^{1/p}))$$

si la medida de Ω es infinita, obtenemos la fórmula asintótica no estándar

$$N(\lambda) = \#\{j \in N : \lambda_j \leq \lambda\} = \pi_p^{-d}\zeta(d)f(\lambda^{1/p}) + o(f(\lambda^{1/p})),$$

donde ahora $d > 1$.

El trabajo esta disponible en el `arxiv` en `http://arxiv.org/abs/0906.2198`.

Referencias

[1] K. Falconer, *Fractal geometry*, Wiley, Chichester, 1990.

[2] Fernńdez Bonder J. & Pinasco J.P. *Asymptotic Behavior of the Eigenvalues of the One Dimensional Weighted p-Laplace Operator*, Arkiv fr Mat., 2003, Vol. 41, 267-280.

[3] He, C.Q. & Lapidus, M.L. *Generalized Minkowski content, spectrum of fractal drums, fractal strings and the Riemann zeta-function.* Mem. Amer. Math. Soc. 127 (1997), no. 608.

[4] M. Lapidus. *Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture*, T. Amer. Math. Soc., 325 (1991), 465–529.

[5] Pinasco J.P. *Asymptotic of eigenvalues of the p-Laplace operator and lattice points*

[6] Courant R. & Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol 1, New York, Interscience Publications, Inc., 1953.

Autores: G. Calandrini, J. Moiola y A. Torresi
Lugar: Depto. de Matemática - Depto. de Ing. Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur
Expositor: Ana Torresi

Coeficientes en la ecuación de bifurcación de órbitas periódicas en el dominio frecuencia

Utilizando métodos de balance armónico las soluciones periódicas de un sistema dinámico paramétrico pueden ser analizadas como los ceros de una ecuación algebraica [3]. Para ello es importante tener una metodología lo más sencilla posible para obtener los coeficientes de la ecuación de bifurcación hasta el mayor orden posible.

Sea un sistema dinámico $\mathcal{S}$ representado como un sistema lineal de entrada-salida $(\mathcal{L}e)(s) = -G(s,\mu)(\mathcal{L}u)(s)$, y una realimentación no lineal definida por $u = f(y,\mu)$; donde $\mathcal{L}(.)$ es la transformada de Laplace, $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de bifurcación, $G(s,\mu) \in \mathbb{C}^{m\times l}$ es la función transferencia y $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ es C^r.

Sea $e = -y$, $\hat{e}$ localmente la única solución de $G(0,\mu)f(e,\mu) + e = 0$ y sea $J = (Df)_{\hat{e}}$ la matriz jacobiana en el equilibrio.

Supongamos que existe una única función característica simple de la función transferencia de lazo abierto $G(i\omega, \mu)J$, que notamos $\hat{\lambda}(\omega, \mu)$, verificando $\hat{\lambda}(\omega_0, \mu_0) = -1$ para una única frecuencia ω_0. Entonces las soluciones de la ecuación

$$\theta \left(\hat{\lambda}(\omega, \mu) + 1 + \theta^2 \xi_1(\omega, \mu) + \theta^4 \xi_2(\omega, \mu) + \cdots + \mathcal{O}(\theta^{2k+2}) \right) = 0, \qquad (1)$$

están en correspondencia uno a uno con las soluciones periódicas de pequeña amplitud (θ) del sistema $\mathcal{S}$ con período cercano a $2\pi/\omega_0$, de acuerdo sólo al primero de los postulados del teorema de bifurcación de Hopf con el método frecuencia [1], con lo cual (1) considera todos los casos degenerados de Hopf asumiendo la existencia de una única función característica simple.

A (1) la denominamos ecuación de bifurcación de alto orden de soluciones periódicas, donde las expresiones de $\xi_k(\omega, \mu)$ se obtienen al considerar el balance armónico de una solución de orden $2k$.

Hasta el momento, en diversos trabajos, se han dedicado numerosos esfuerzos para obtener expresiones para $\xi_k(\omega, \mu)$, en [1] se dan fórmulas explícitas hasta $k = 2$, en [2] hasta $k = 4$ y en ambos una metodología algebraicamente muy compleja para obtener las de orden mayor. Presentamos un nuevo algoritmo para el cálculo de $\xi_k(\omega, \mu)$ hasta cualquier orden, el cual es más eficiente y junto con el uso de la computación simbólica alivian su implementación, tanto en su aplicación en ejemplos de interés como así también en el estudio teórico de casos degenerados de bifurcaciones de Hopf.

Referencias

[1] Mees, A. I. [1981]. *Dynamics of Feedback Systems*. Wiley, New York.

[2] Moiola, J. y Chen G. [1996]. *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*. 21, Nonlinear Science, World Scientific Co., Singapore.

[3] Torresi, A, J. Calandrini y J. Moiola.[2009] *Índices focales: el Método Gráfico de Hopf y la Teoría de Singularidades*, preprint.

Conferencia Invitada
Griselda Itovich
Universidad Nacional de Río Negro, Sede Alto Valle

Bifurcación de ecuaciones diferenciales con retardo en el dominio frecuencia: Una generalización

Un enfoque que permite analizar ecuaciones diferenciales con retardos temporales (EDR), como

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), \lambda)$$

donde $x \in R^n, f : R^{2n} \times R \to R^n, f \in C^2, \tau \in R^+, \lambda \in R$, es la metodología en el dominio frecuencia. Para esto es necesario incorporar nuevas variables de entrada y salida, aplicar una transformada de Laplace e interpretar el modelo resultante, separando una parte lineal y otra no lineal, como un sistema realimentado. En este contexto, se puede estudiar el fenómeno de bifurcación de Hopf, por medio de una adaptación del teorema de Hopf gráfico [1]. Una de las ventajas notables que puede ofrecer este enfoque, que se aplica también en el estudio de bifurcación en ecuaciones diferenciales ordinarias [2], se refiere a la posibilidad de reducir la dimensión del espacio original de soluciones. Además, se sabe que cuando el problema a analizar puede reducirse al caso unidimensional, el método presenta varias simplificaciones. En este trabajo, se propone considerar el caso más general donde el tratamiento en el dominio frecuencia no es unidimensional. Para esta situación, la determinación de expresiones aproximadas para las soluciones periódicas emergentes, requiere el cálculo de nuevas magnitudes (antes triviales) que complejizan la aplicación de la metodología propuesta. En este marco, también se propone el análisis de algunas degeneraciones del teorema clásico de la bifurcación de Hopf.

La importancia del análisis de sistemas de EDR, puede relacionarse con múltiples aplicaciones como el estudio de modelos de redes neuronales, poblacionales, mecanismos biológicos asociados con las llamadas “enfermedades dinámicas”, en sistemas de comunicaciones congestionadas por retardos de transmisión, etc.

Trabajo en colaboración con J. Moiola, A. Bel y W. Reartes.

Referencias

[1] Mees, A. I. y Chua, L. O. (1979). “The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **26**(4), 235-254.

[2] Moiola, J. L. y Chen, G. (1996). *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*, World Scientific, Singapur.

Autor: Constanza Sánchez de la Vega
Lugar: Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

---

Problemas de control óptimo con evolución de Volterra y restricciones en el estado

La teoria clásica de control óptimo fue originalmente desarrollada para tratar con sistemas controlados que evolucionan según una ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, se ha visto que ciertos problemas derivados de la física, la biología y la economía no pueden ser descriptos correctamente por una ecuación diferencial ordinaria. Una gran cantidad de estos sistemas pueden ser descriptos por ecuaciones integral de tipo Volterra, es decir, dado $u(t) \in \mathbb{R}^m$ el control, el estado $y(t) \in \mathbb{R}^n$ evoluciona según una ecuación del tipo:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f\left(t, s, u\left(s\right), y\left(s\right)\right) ds \quad t \in [0, T] \tag{1}$$

Los problemas de control óptimo donde el estado evoluciona según una ecuación de Volterra ha recibido la atención de varios autores, como por ejemplo Vinokurov en 1969 [7], Bakke en 1974 [1] y Carlson en 1987 [4]. Más recientemente, modelos incluyendo retardo no lineal en el estado fueron formulados por Burnap y Kazemi en 1999 [3] y en de la Vega 2006 [5] se prueban condiciones necesarias para un problema de tiempo final y control óptimo con evolución de tipo Volterra y restricciones en el estado en el tiempo final. Por el momento no se han probado condiciones necesarias para un problema de control óptimo donde el estado evoluciona según una ecuación de Volterra y con restricciones puras en el estado para todo tiempo del intervalo del tipo:

$$g(y(t)) \leq 0 \text{ para todo } t \in [0, T]. \tag{2}$$

Numerosas diferentes versiones del Principio de Pontryagin para estados que evolucionan según una ecuación diferencial y con restricciones en el estados fueron dados en la literatura. Se puede ver el estado del arte en el survey de Hartl et al. 1995 [6].

En este caso, consideramos el problema de control óptimo:

$$\min_{(u,y)} J(u, y) = \int_0^T \ell\left(u(t), y(t)\right) dt + \Phi(y(T)) \qquad u(t) \in \mathcal{U},$$

sobre todos los pares *admisibles* que verifican la ecuación (1) y las restricciones (2).

Siguiendo la formulación del Principio del Mínimo dada por [2] para sistema que evolucionan según una ecuación diferencial ordinaria, se prueba una extensión del Principio del Mínimo para sistemas que evolucionan según una ecuación integral del tipo Volterra con restricciones en el estado. Este es un trabajo en colaboración con J.F. Bonnans (INRIA-Saclay and Ecole Polytechnique, Palaiseau, France).

Referencias

[1] BAKKE, V. L. *A Maximum Principle for an Optimal Control Problem with Integral Constraints,* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 13, pp. 32-55, 1974.

[2] BONNANS, J.F. and HERMANT, A. *Well-posedness of the shooting algorithm for state constrained optimal control problems with a single constraint and control.* SIAM J. Control Optimization, Vol. 46, pp. 1398-1430, 2007.

[3] BURNAP, C. and KAZEMI M. *Optimal Control of a System Governed by Nonlinear Volterra Integral Equations with Delay.* IMA Journal of Mathematical Control and Information, Vol. 16, pp. 73-89, 1999.

[4] CARLSON, D. A. *An Elementary Proof of the Maximum Principle for Optimal Control Problems Governed by a Volterra Integral Equation.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 54, pp. 43-61, 1987.

[5] DE LA VEGA. *Necessary Conditions for Optimal Terminal Time and Control Problems Governed by a Volterra Integral Equation.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 130, pp. 79-93, 2006.

[6] HARTL, R.F., SETHI, S.P. and VICKSON, R.G. *A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints.* SIAM Review, Vol. 37, pp. 181-218, 1985.

[7] VINOKUROV, V. R, *Optimal control of processes described by integral equations.* SIAM Journal on Control 7 , 324-336, 1969.

Autores: Pablo Amster(1), Corina Averbuj(1)(2)
Lugar: (1)Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires (2)CETyMA - Universidad Nacional de San Martín
Expositor: Corina Averbuj

Soluciones de Ecuaciones Integro-Diferenciales parabólicas asociadas a modelos tipo Black-Scholes con saltos

La ecuación de Black-Scholes para valuar opciones ha adquirido gran importancia en los últimos años, y ha sido estudiada por numerosos autores (ver, por ejemplo, [A], [H], [I]). En principio, este modelo supone que el activo subyacente es una acción cuyo valor sigue un movimiento geométrico Browniano, donde la variación en el precio marginal se debe esencialmente a la oferta y la demanda del respectivo activo. Asimismo, podemos considerar las posibles variaciones en el precio de la acción debido a información relevante proveniente de la propia compañía o su respectiva industria. En función de esta situación habrá momentos de "calma" y momentos en los que se producen variaciones bruscas en los precios ("saltos"). En consecuencia, podemos pensar el arribo de esta nueva información como un proceso de punto, y en particular notar que verifica los axiomas que rigen un proceso de Poisson, por lo tanto esta componente en la valuación de la acción es modelado por un proceso de Poisson (ver [M]). Si consideramos los dos componentes que pueden modificar el valor del activo S, se obtiene la siguiente ecuación integro - diferencial parcial en las variables t y S :

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + (r - \lambda k) S F_S - F_t - rF + \lambda\varepsilon \left\{ F(SY, t) - F(S, t) \right\} \qquad (1)$$

En esta ecuación r es la tasa libre de riesgo, λes la intensidad del salto, $k = \varepsilon(Y-1)$, donde $Y-1$ es la variable aleatoria que representa el cambio en el precio del activo S, si el proceso de Poisson ocurre, y ε es el operador esperanza sobre la variable aleatoria Y, para mas detalles ver [M], [AA]. Se estudian generalizaciones del problema (1) con condiciones de contorno adecuadas y aplicando el método de Galerkin se encuentra la existencia de solución en dominios acotados.

Referencias

[A] M. Avellaneda, Quantitative modeling of derivatives securities, Chapman & Hall/CRC,2000.

[AA] L. Andersen, J. Andreasen, Jump diffusion processes: volatility smile fitting and numerical methods for option pricing. Review of derivatives research, 4, 231-262, 2000.

[AAM] P. Amster, C.G. Averbuj, M. C. Mariani, Solutions to a stationary nonlinear Black - Scholes type equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications.

[GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer - Verlag (1983).

[H] J.C. Hull, Options, Future and other Derivatives. Prentice - Hall, Inc.1997.

[I] Ikeda, S.Watanabe, Stochastic Differential Equations and diffusion processes. North - Holland,1989.

[M] R. C. Merton, Continuous - Time Finance. Blackwell, Cambridge 2000.

Autores: Pablo Amster y Manuel Maurette
Lugar: Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires
Expositor: Manuel Maurette

Singularidades de tipo repulsivo en sistemas periódicos

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales singular:

$$\begin{cases} u'' + g(u) = p(t) \\ u(t+T) = u(t) \end{cases} \tag{1}$$

con $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, continua acotada en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \backslash B_1(0)$; $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ continua, $T-$periódica y de promedio 0: $\int_0^T p(t)dt = 0$. Se tiene además que que g tiene una singularidad repulsiva en el origen. Es decir, que existe un $c > 0$ tal que

$$\langle g(u), u \rangle < 0 \qquad \text{para } 0 < |u| < c. \tag{2}$$

Este problema fue estudiado entre otros por Solimini [Sol90] y describe por ejemplo potencial electrostático entre dos cargas del mismo signo.

Para lidiar con la singularidad se estudian en [AM09] los problemas truncados:

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' + g_\varepsilon(u) = p(t) \\ u_\varepsilon(t+T) = u_\varepsilon(t) \end{cases} \tag{3}$$

con

$$g_\varepsilon(u) = \begin{cases} g(u) & |u| \geq \varepsilon \\ \frac{|u|}{\varepsilon} g\left(\varepsilon \frac{u}{|u|}\right) & 0 < |u| < \varepsilon \\ 0 & u = 0 \end{cases}$$

Dadas ciertas condiciones y aplicando un resultado para el caso no singular, se prueba existencia de soluciones u_ε para (3). Se investiga acerca del comportamiento de la familia $\{u_\varepsilon\}$ al tender $\varepsilon \to 0$ definiendo una noción de solución generalizada del problema (1) y se estudian casos en los cuales (2) asegura que el límite $u : u_\varepsilon \to u$ sea solución generalizada de (1).

Finalmente se muestra una aplicación al problema de 2 cuerpos repulsivo perturbado.

Referencias

[AM09] Pablo Amster y Manuel Maurette, *Periodic solutions of systems with singularities of repulsive type.* Enviado.

[Sol90] Sergio Solimini, *On forced dynamical systems with a singularity of repulsive type*, Nonlinear Analysis.(1990) 489-500.

Autores: Analía Silva y Julián Fernández Bonder
Lugar: Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires
Expositor: Analía Silva

Principio de Compacidad por concentración para exponente variable

En este trabajo se extiende el Principio de compacidad por concentración de P.L.Lions [3] para el caso de exponente variable. El resultado obtenido es el siguiente: Sea $\Omega \subset R^N$ un abierto acotado y sean $q(x)$ y $p(x)$ funciones continuas tales que $p(x) < N$ y $q(x) \leq p(x)$ en Ω. Sea $\{u_j\}$ una sucesión débil convergente en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ con limite débil u,tal que:

- $|\nabla u_j|^{p(x)} \rightharpoonup \mu$ débil-* en el sentido de las medidas.
- $|u_j|^{q(x)} \longrightarrow \nu$ débil-* en el sentido de las medidas.

Además, suponemos que $\mathcal{A} = \{x \in \Omega \colon q(x) = p^*(x)\}$ es no vacio, donde $p^*(x) := \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ con es el exponente crítico de la inclusión de Sobolev. Entonces,para un conjunto numerable de indices I tenemos:

$$\nu = |u|^{q(x)} + \sum_{i\in I} \nu_i \delta_{x_i} \quad \nu_i > 0 \tag{1}$$

$$\mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{i\in I} \mu_i \delta_{x_i} \quad \mu_i > 0 \tag{2}$$

$$S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)} \qquad \forall i \in I. \tag{3}$$

Donde $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{A}$ y S es la constante óptima en la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev para exponente variable. Dicho resultado puede ser utilizado para resolver problemas con perdida de compacidad, en el caso de exponente variable, siguiendo las ideas utilizadas para el caso constante de J.Garcia Azorero e I. Peral[1]

Referencias

[1] J. Garcia-Azorero and I. Peral, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term.* Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), no. 2, 877–895.

[2] P.L. Lions. *The concentration–compactness principle in the calculus of variations.* The limit case, part 1, Rev. Mat. Iberoamericana. Vol. 1 No.1 (1985), 145–201.

Autores: Claudia, Gariboldi, Graciela Giubergia y Fernando Mazzone
Lugar: FCEFQyN - Universidad Nacional de Río Cuarto
Expositor: Graciela Giubergia

Regularidad de Sobolev de soluciones débiles de ecuaciones cuasilineales degeneradas

Consideremos ecuaciones elípticas de la siguiente forma:

$$\operatorname{div} A(x, \nabla u(x)) = g(x), \tag{1}$$

en $B_r \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que $A = (a^1, \ldots, a^n) \in C^0(B_r \times \mathbb{R}^n) \cap C^1(B_r \times \mathbb{R}^n - \{0\})$ es una función de Caratheodory y satisface las condiciones de estructura

$$c_1 w(x)(1 + |\eta|)^{p-2}|\xi|^2 \leq \frac{\partial a^i}{\partial \eta_j}\xi_i\xi_j \tag{2}$$

$$|a^i| + \left|\frac{\partial a^i}{\partial x_j}\right| + (1 + |\eta|)\left|\frac{\partial a^i}{\partial \eta_j}\right| \leq c_3 w(x)(1 + |\eta|)^{p-1} \quad \text{for } i, j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, para casi todo $x \in B_r$, con c_1, c_3 constantes positivas, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$. w denota una función de peso, que además está en la clase de Muckenhoupt A_1 uniformemente en cada coordenada. Supondremos también que $g/w \in L^2(B_r, w)$.

El problema de examinar soluciones de ecuaciones elípticas lineales degeneradas en forma de divergencia fue tratado en [1], [2]. En [3] está desarrollada ampliamente la teoría para ecuaciones degeneradas no lineales. En este trabajo abordamos regularidad de Sobolev para soluciones débiles de (1) con la idea de generalizar los resultados de [1]. (Por $W^{1,p}(B_r, w)$ denotamos espacios de Sobolev pesados)Mas específicamente probamos

Teorema: Sea $u \in W^{1,p}(B_r, w)$, $p \geq 2$, una solución débil de (1). Supongamos que A satisface las condiciones de estructura (2) y (3), $g/w \in L^2(B_r, w)$ y w está uniformemente en A_1 en cada coordenada. Entonces $u \in W^{2,2}(B_{\frac{r}{2}}, w)$ y las derivadas segundas de u satisfacen

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} |D_{ij}u|^2(1 + |\nabla u|)^{p-2}dx < \infty \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Referencias

[1] A. C. Cavalheiro, Regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations,Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXVII, 1(2008), pp. 43-54.

[2] E. Fabes - C. Kenig - R. Serapioni, The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations, Comm in P.D.E, 7(1) , 1982, pp. 77-116.

[3] J. Heinonen - T. Kilpeäinen - O. Martio, Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, Dover, New York, 1993

Autor: Federico Tournier
Lugar: IAM - Universidad Nacional de La Plata

Teoremas de densidad para una ecuacion hipoelíptica

Consideramos los campos de $\mathbb{R}^3$ dados por $X_1u = u_x - \frac{y}{2}u_z$ y $X_2 = u_y + \frac{x}{2}u_z$ y sea $X_{i,j}u = \frac{1}{2}(X_iX_ju + X_jX_iu)$ y Hu la matriz de $2x2$ $Hu = (X_{i,j}u)$, $i, j = 1, 2$. Sea $H_{x_0,y_0,z_0} = \{(x, y, z) : z - z_0 = \frac{1}{2}(x_0y - y_0x)\}$.Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^3$ decimos que u definida en Ω es convexa si vale que $u((1 - \lambda)(x_0, y_0, z_0) + \lambda(x, y, z)) \leq (1 - \lambda)u(x_0, y_0, z_0) + \lambda u(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in H_{x_0,y_0,z_0} \cap \Omega$, para todo $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$.

Dado Ω abierto y acotado en $\mathbb{R}^3$ y $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, consideramos la siguiente clase de funciones:

$\Lambda_{p_0} = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : u \geq 0 \; en \; \partial\Omega, u(p_0) \leq -1\}$ y vamos a asumir la siguiente conjetura (que llamaremos de ABP): Existe $a > 0$ dependiendo solamente de Ω tal que $\int_{C_u} (\det Hu(x, y, z))^2 dxdydz \geq a$ para toda $u \in \Lambda_{p_0}$ y donde

$C_u = \{(x, y, z) \in \Omega : \gamma_u = u\}$ y $\gamma_u(x, y, z) = \sup\{v(x, y, z) : v \; es \; convexa, \; v \leq u \; en \; \Omega\}$.

Asumiendo la conjetura ABP, vamos a probar teoremas de densidad en los cilindros $C_\delta = \{(x, y, z) : max\{r, |z|^{\frac{1}{2}}\} < \delta\}$ para el operador $Traza(AHu)$ donde $A = (a_{i,j}(x, y, z))$ es una matriz $2x2$ estrictamente eliptica.

Referencias

[1] C.E. Gutierrez. The Monge-Ampere Equation.Birkhauser.Boston (2001).

[2] G. Di Fazio,C.E. Gutierrez, E. Lanconelli. Covering theorems,inequalities on metric spaces and applications to PDEs. Math. Ann (2008).

[3] D. Danielli, N. Garofalo,D. M. Nhieu. Notions of convexity in Carnot Groups. Communications in Analysis and Geometry. (2003)

Conferencia Invitada
Adriana Frausin
Facultad de Ingeniería Química - Universidad Nacional del Litoral

---

El espacio de Sobolev periódico de orden fraccionario y la continuidad simultánea de la operación de traza sobre una familia de curvas

Se define una familia $\mathcal{S}$ de curvas cerradas y suaves que se designan con Γ_γ donde γ es una "adecuada" parametrización de la curva, en el sentido que satisface ciertas propiedades que se vuelven naturales al demostrar que es posible describir los espacios de Sobolev fraccionarios $H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ de un modo uniforme que no dependa de la función particular γ.

Para tales curvas se introduce otro modo de enfocar la norma del espacio de Sobolev fraccionario que denotamos con $H^{1/2}(\gamma)$ y que se obtiene de otro concepto que proviene del análisis de Fourier clásico, que es el de las funciones $2\pi-$periódicas con la regularidad de las funciones de $H^{1/2}$, que denotamos $H^{1/2}_{2\pi}$. Se define este espacio de Sobolev de orden $1/2$ en $[0, 2\pi]$ dando su norma en términos de los coeficientes de Fourier c_k de f de la siguiente manera $H^{1/2}_{2\pi} = \{f : \parallel f \parallel^2_{H^{1/2}_{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mid c_k(f) \mid^2 (1 + k^2)^{1/2} < \infty\}$.

Esta norma puede describirse prescindiendo de la serie de Fourier como $\parallel f \parallel^2_{H^{1/2}_{2\pi}} \approx$

$$\int_0^{2\pi} \mid f(t) \mid^2 \; dt + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mid f(t) - f(s) \mid^2}{\left(\sin \frac{t-s}{2}\right)^2} \, dt \, ds.$$

A partir de este enfoque de la norma de $H^{1/2}_{2\pi}$ se define el espacio de Sobolev asociado a una parametrización γ de clase $\mathcal{C}^1$ de una curva plana cerrada Γ como $H^{1/2}(\gamma) = \{\varphi : \varphi \circ \gamma \in H^{1/2}_{2\pi}\}$ con la norma $\parallel \varphi \parallel_{H^{1/2}(\gamma)} = \parallel \varphi \circ \gamma \parallel_{H^{1/2}_{2\pi}}$, donde $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ y γ es una parametrización sobre $[0, 2\pi]$ de Γ.

Se prueba que para toda curva parametrizada por $\gamma \in \mathcal{S}$, los espacios $H^{1/2}(\Gamma_\gamma)$ y $H^{1/2}(\gamma)$ coinciden como conjuntos y las normas son equivalentes, con constantes de equivalencia que sólo dependen de los parámetros de la familia de curvas $\mathcal{S}$. Más aún, ambos espacios son isomorfos como espacios de Banach con el espacio $H^{1/2}_{2\pi}$ a través del isomorfismo $\varphi \mapsto \varphi \circ \gamma$.

Finalmente, componiendo el operador de traza clásico con estos isomorfismos se demuestra la continuidad de la operación de traza sobre una curva de $\mathcal{S}$ considerada, para $v \in H_0^1(\Omega)$ fija, como una aplicación de $\mathcal{S}$ en $H_{2\pi}^{1/2}$ dada por $\gamma \mapsto \mathcal{T}_\gamma v$.

Trabajo en colaboración con Hugo Aimar.

Referencias

[1] Garrigós G. Tesis doctoral: The characterization of wavelet and related functions and the connectivity al α-localized wavelets on R^n. Washington University, Saint Louis, Missouri, 1998.

[2] Haslinger-Kozubek-Kunisch-Peichl. An embedding domain approach for a class of 2-d shape optimization problems: mathematical analysis. J.Math.Anal.Appl.290(2004) 665-685

[3] Stein E.M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.Princenton University Press, New Jersey 1970.

Autor: Juan Pablo Borgna
Lugar: Depto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

---

Cálculo de estados fundamentales para la ecuación relativista de Schrödinger cúbica

En las primeras formulaciones de la Mecánica Cuántica, en la década de 1920, uno de los problemas que se afrontaba era la de conjugar los resultados y las predicciones de la incipiente nueva teoría con las también nueva Teoría de la Relatividad. El sencillo problema de las ecuaciones del movimiento de una partícula libre cargada viajando a una velocidad cercana a la de la luz requería conjugar y armonizar ambas puntos de vista. Los modelos condujeron a la expresión, ya adimensionalizada, de la ecuación relativista de Schrödinger

$$i\psi_t\,(t,x) = \left(\sqrt{m^2 - \partial_x^2} - m\right)\psi(t,x) - V\left(x, |\psi|^2\right)\psi$$

donde ψ es la función de onda de la partícula, m es su masa y V es el potencial no local de interacción. En el caso de una partícula libre el potencial V usado es el de la interacción columbiana que conduce a un potencial del Hartree (convolución del núcleo singular con el cuadrado del módulo de la función de onda), pero también se puede considerar un potencial V que sólo tenga en cuenta la densidad de carga, por ejemplo $V = |\psi|^2$, lo que plantea una ecuación relativista de Schrödinger cúbica.

En 2005, J. Fröhlich ([Froh])probó la existencia de estados fundamentales impulsados (”boosted groud states”, los únicos que son compatibles con el carácter relativista de esta ecuación) para el caso en que V es del tipo Hartree, pero aún no existe prueba de la existencia de tales estados para el caso de la ecuación cúbica.

En este trabajo presentamos algunos resultados dirigidos a la prueba de la existencia de estados fundamentales para la ecuación cúbica. El primer objetivo es usar técnicas espectrales para la obtención de un método numérico adecuado a esta ecuación pseudodiferencial. Esto permitiría obtener el perfil de un estado fundamental por minimización directa de la energía, como un problema de búsqueda de óptimo sujeto a restricciones sobre la norma de la solución. El método de minimización se inicia en una solución del problema diferencial aproximado, el cual es calculado explícitamente. Como antecedente de este tipo de técnica tenemos lo hecho por W. Bao en [B-T], donde desarrolla este tipo de método en el estudio de técnicas numéricas aplicadas a la solución fundamental en los condensados de Bose-Einstein.

Referencias

[B-T] W. Bao & W. Tang, *Ground-State solution of Bose-Einstein condensate by directly minimizing the energy functional*. Journal of Comp. Physics, **187** (2003) pp 230-254.

[Froh] Jürg Fröhlich, B. Lars G. Jonsson, Enno Lenzmann, *Boson Stars as Solitary Waves*, arXiv:math-ph/0512040 v1, 12 Dec 2005.

Conferencia Invitada
Domingo Tarzia
Depto. de Matemática - CONICET, Universidad Austral

Existencia y unicidad global para la ecuación del calor no-clásica n-dimensional

Se considera el dominio n-dimensional $\Omega = (0, +\infty) \times R^{n-1}$ y el problema de contorno siguiente para la temperatura $u = u(x, y, t)$, definida para $x > 0$, $y \in R^{n-1}$ y $t > 0$, que satisface:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -F(u_x(0, y, t)), \quad en \quad \Omega \times (0, +\infty), \tag{1}$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad y \in R^{n-1}, \quad t > 0, \tag{2}$$

con la condición inicial

$$u(x, y, 0) = h(x, y) \quad en \quad \Omega, \quad x > 0, \quad y \in R^{n-1}, \tag{3}$$

donde h es la temperatura inicial y $-F$ representa la fuente de energía interna que depende del flujo de calor sobre la frontera del dominio. El problema está motivado por la modelización de la regulación de la temperatura en el medio [BTV, TV].

Utilizando la función de Green [F] para el dominio Ω se encuentra para la solución $u = u(x, y, t)$ una representación integral en función del flujo de calor $V(y, t) = u_x(0, y, t)$ que es una incógnita suplementaria del problema. Se obtiene que V debe satisfacer una ecuación integral de Volterra de segunda especie en el tiempo t y con parámetro $y \in R^{n-1}$. Bajo ciertas condiciones sobre los datos del problema h y F se demuestra que existe una única solución local que puede extenderse globalmente en el tiempo [M]. Se generalizan resultados obtenidos en [TV] para el caso $n = 1$.

Trabajo en colaboración con M. Bouckrouche.

Referencias

[BTV] L.R. Berrone - D.A. Tarzia - L.T. Villa, Asymptotic behavior of a non-classical heat conduction problem for a semi-infinite material, Math. Meth. Appl. Sci., 23 (2000), 1161-1177.

[F] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Prentice Hall (1964).

[M] R.K. Miller, Nonlinear Volterra integral equations, W.A. Benjamin (1971).

[TV] D.A. Tarzia - L.T. Villa, Some nonlinear heat conduction problems for a semi-infinite strip with a non-uniform heat source, Rev. Un. Mat. Argentina, 41 (1998), 99-114.

Autores: Pablo Stinga y José Luis Torrea
Lugar: Depto. de Matemáticas, Fac. de Cs., Universidad Autónoma de Madrid, España
Expositor: Pablo Stinga

El oscilador armónico fraccionario: extensión y desigualdad de Harnack

En la presente comunicación presentaremos algunos resultados de la tesis doctoral (en curso) del expositor.

Motivados por los trabajos sobre problemas no lineales asociados al Laplaciano fraccionario publicados por Luis Caffarelli, Luis Silvestre y colaboradores [1, 2, 3, 4, 5], definimos de forma natural las potencias fraccionarias positivas del oscilador armónico $H^\sigma = (-\Delta + |x|^2)^\sigma$, $0 < \sigma < 1$ y encontramos una fórmula puntual para $H^\sigma f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Como en el caso del Laplaciano fraccionario [2] podemos realizar el oscilador armónico fraccionario como un operador de tipo Dirichlet-to-Neumann a través de un problema de extensión al semiespacio superior. Finalmente, usando esta caracterización, obtenemos una desiguadad de Harnack para H^σ.

Referencias

[1] L. Caffarelli, S. Salsa and L. Silvestre, Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian, *Invent. Math* **171** (2008), 425–461.

[2] L. Caffarelli and L. Silvestre, An extension problem related to the fractional laplacian, *Comm. Partial Differential Equations* **32** (2007), 1245–1260.

[3] L. Caffarelli and A. Vasseur, Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation, *Ann. of Math.* (to appear).

[4] L. Silvestre, Hölder estimates for solutions of integro-differential equations like the fractional Laplace, *Indiana Univ. Math. J.* **55** (2006), 1155–1174.

[5] L. Silvestre, Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator, *Comm. Pure Appl. Math.* **60** (2007), 67–112.

Autores: O. Barraza, L. Langoni
Lugar: Universidad Nacional de La Plata
Expositor: Oscar Barraza

Sobre las soluciones de una ecuación de reacción-difusión

Estudiamos la existencia de soluciones no negativas de la ecuación de reacción-difusión

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0, \end{cases} \tag{1}$$

donde el dato inicial u_0 es no negativo. Damos condiciones sobre u_0 y f para la existencia de solución global del problema. Además, bajo dichas hipótesis, estudiamos la tasa de decaimiento de la norma $\|u(.,t)\|_{L^\infty}$ que se corresponde con el obtenido en [1] para el caso particular $f(u) = u^p$. Finalmente, utilizamos el método de entropía para obtener la tasa de decaimiento de la norma $\|u(.,t)\|_{L^2}$. Este método ya ha sido utilizado anteriormente para estudiar el decaimiento de las soluciones de distintos tipos de ecuaciones parabólicas, ver por ejemplo [2], [3] donde se aplica a una ecuación del tipo Fokker - Planck y [4] donde se aplica a (1) para el caso en que $f(u) = u^p$. Este estudio permite ampliar el rango de aplicabilidad del método de entropía.

Referencias

[1] Xuefeng Wang, *On the Cauchy Problem for Reaction-Diffusion Equations*, Transactions of the American Mathematical Society **337** (1993) 549-590.

[2] J.A. Carrillo, G. Toscani, *Asymptotic L^1-decay of Solutions of the Porous Medium Equation to Self-similarity*, Indiana University Mathematics Journal **49, N 1** (2000) 113-142.

[3] J.A. Carrillo, A. Jüngel, P.A. Markowich, G. Toscani, A. Unterreiter, *Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalizad Sobolev inequalities*, Monatsh. Math. **133** (2001) 1-82 .

[4] O. Barraza, L. Langoni, *Asymptotic behavior of global solutions of a semilinear parabolic problem*, Nonlinear Analysis **70** (2009) 1465-1474.

Autores: C. Ruscitti, O. Barraza
Lugar: Universidad Nacional de La Plata
Expositor: Claudia Ruscitti

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE SOLUCIONES DE UN MODELO HIPERVISCOSO PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE.

Es bien conocida la importancia del sistema incompresible de Navier-Stokes en el estudio de la mecánica de fluidos y las distintas áreas de aplicación que incluyen a la Física, la Ingeniería y otras disciplinas. También son conocidas las dificultades que presenta el estudio de las soluciones globales de dicho sistema. Varios métodos han sido desarrollados para probar la existencia de las soluciones globales de Navier-Stokes en $\mathbb{R}^n$.

Uno de ellos es el método de hiperviscosidad propuesto por J.-L. Lions que consiste en reemplazar el Laplaciano $-\triangle$ por la suma $-\triangle + \alpha(-\triangle)^{-l/2}$, $l > 2$. El sistema de Navier-Stokes con hiperviscosidad fue concebido como una perturbación del sistema de Navier-Stokes cuyas soluciones son aproximadas por las del sistema hiperviscoso. En un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$, J.- L. Lions prueba la existencia de una única solución regular para $l \geq 5/2$ ([3]). En este trabajo consideramos soluciones globales en tiempo del siguiente modelo hiperviscoso para un fluido incompresible

$$\begin{aligned} u_t - \nu\triangle u + \alpha(-\triangle)^{\frac{l}{2}} u + (u.\nabla)u + \nabla p = 0 \\ \nabla.\ u = 0, \\ u(0) = u_0, \end{aligned}$$

cuya existencia en ciertos espacios funcionales se muestra en [2], estudiamos la estabilidad de dichas soluciones comparando las soluciones de ambos modelos y mostramos, mediante el empleo de técnicas análogas a las utilizadas en [1], que las tasas de decaimiento de las soluciones globales en ambos modelos coinciden.

Referencias

[1] O. Barraza, C. Ruscitti, *Stability of bounded global solutions for Navier-Stokes equations*, Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 48, No. 1, 2008, 141-148. ISSN 1311-8080

[2] M. Cannone, G. Karch, *About the regularized Navier-Stokes equations*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, Vol. 7, No. 1, 2005, 1-28.

[3] J.-L. Lions, *Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

Autores: Villa L.T., Grossi R., Ryan G.
Lugar: Fac. Ingeniería, Universidad Nacional de Salta
Expositor: Luis Villa

Sobre Existencia y unicidad de solución en serie de potencias en Difusión-Reacción no lineal

Se demuestra la existencia y unicidad para la solución de un problema de contorno no lineal, con la estructura de una serie de potencias en la variable espacial. La ecuación diferencial describe un proceso de difusión-reacción catalítica con cinética no lineal, muy frecuente en las aplicaciones industriales.

En un trabajo anterior ya presentado ([5]), se presentaba una solución, suponiendo la convergencia de la serie. Ahora, usando un teorema conocido de punto fijo, se demuestra que, para cierto rango de los parmetros de la cinética en juego en los casos analizados, existe solución única, dada por tal serie.

Referencias

[1] Abbasbandy S., Aproximate solution for the nonlinear model of diffusion in porous catalysts by means of the homotopy analysis method. To appear in Chemical Engineering Journal, 2007.

[2] Aris. R., Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalyst, Oxford University Press, London, 1975

[3] Gonzo E., Gottifredi J. C., Non isothermal efectiveness factor estimation with simple analytical expressions, Lat. Am. J. Heat Transf. 6 (1982) 131-129.

[4] Gottifredi J. C., Gonzo E. E., Quiroga O. D, Isotherm effectiveness factor I. Analytical expression for single reaction with arbitrary kinetics, Slab geometry, Chem Eng Sci. 36 (1981a) 705-711.

[5] Filipich C. P., Villa L. T., Grossi R. D., The power series method in the efectiveness factor calculations. Aceptado en Latin American Applied Research.