

ESTUDIO DE UN PROBLEMA INVERSO DEL CALOR NO LOCAL CON CONDICIÓN DE DIRICHLET HOMOGÉNEA

Nelson Ricardo OJEDA

Facultad de Recursos Naturales, Universidad Nacional de Formosa, Argentina.
ojeda.7math@gmail.com

En el campo de los Problemas Inversos, uno de los modelos más estudiados es el denominado Backward Heat Equation (BHE), o problema de la ecuación del calor hacia atrás. Este consiste en reconstruir la distribución inicial de temperatura de un sistema a partir de mediciones realizadas en un instante posterior. A diferencia del problema directo de la ecuación del calor, donde la condición inicial es conocida y se busca determinar la evolución temporal del sistema, en el problema inverso se pretende recuperar un estado pasado a partir de información disponible en el estado final.

Una característica esencial del BHE es que constituye un problema mal condicionado (ill-posed) en el sentido de Hadamard, debido a que no satisface la propiedad de dependencia continua respecto de los datos de entrada. En consecuencia, pequeñas perturbaciones —como aquellas originadas por errores experimentales o ruido en las mediciones— pueden amplificarse significativamente durante el proceso de reconstrucción, produciendo grandes errores en la solución aproximada. Este fenómeno hace indispensable el empleo de técnicas de regularización, cuyo objetivo es estabilizar el problema y obtener aproximaciones robustas de la solución (véase [3]).

En los últimos años, los modelos de difusión fraccionaria han despertado creciente interés debido a su capacidad para describir procesos con memoria y transporte anómalo. En particular, la introducción de derivadas fraccionarias respecto de otra función, propuesta por Almeida ([1]), permite incorporar una amplia familia de operadores fraccionarios clásicos —como los de Caputo, Caputo-Hadamard y Caputo-Katugampola— dentro de un mismo marco unificado, ofreciendo una mayor flexibilidad para modelar distintos mecanismos de memoria.

Motivados por estas consideraciones, en este trabajo estudiamos una formulación no local del problema de la ecuación del calor hacia atrás, donde la evolución temporal está gobernada por la derivada fraccionaria de Caputo respecto de una función ψ , mientras que la difusión espacial es modelada mediante el laplaciano fraccionario espectral de orden $s \in (0, 1)$ (véase [2]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio abierto y acotado con frontera suficientemente regular y sea $T > a \geq 0$. Consideramos el problema

$${}^C D_{a+, \psi}^\alpha u(\mathbf{x}, t) + (-\Delta_{D,0})^s u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (a, T],$$

sujeito a la condición de frontera homogénea $u(\mathbf{x}, t) = 0$, $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (a, T]$. El problema inverso consiste en reconstruir la condición inicial $u_0(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, a)$, a partir de observaciones de la temperatura final $u_T(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, T)$, la cual satisface la condición de compatibilidad $u_T(\mathbf{x}) = 0$, $x \in \partial\Omega$. En este trabajo estudiamos varias propiedades de este problema inverso, analizamos su carácter mal condicionado y desarrollamos una técnica de regularización basada en la representación espectral del laplaciano fraccionario y en ciertas propiedades analíticas de la derivada de Caputo respecto de una función.

Trabajo en conjunto con SPIES, Ruben Daniel (Instituto de Matemática Aplicada del Litoral IMAL, CCT-CONICET Santa Fe, Argentina).

Referencias

- [1] Almeida, R. (2017). A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 44, 460–481.
- [2] Antil, H., Pfefferer, J., and Rogovs, S. (2018). Fractional operators with inhomogeneous boundary conditions: Analysis, control, and discretization. *Com. in Mathematical Sciences*, 16(5), pp. 1395–1426.
- [3] Engl, H. W., Hanke, M., and Neubauer, A. (1996). *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publisher.