

BASES REDUCIDAS PARA PROBLEMAS DE REACCIÓN-DIFUSIÓN SINGULARMENTE
PERTURBADOS: CONVERGENCIA SOBRE MALLAS GRADUADAS

Rolando Javier Cardozo

Universidad Nacional de Rosario & CONICET, Argentina
rolandojcardozo@fceia.unr.edu.ar

Consideramos el problema de reacción-difusión singularmente perturbado parametrizado de la forma

$$-\varepsilon^2 \Delta u + c(x)u = f \quad \text{en } \Omega = (0, 1)^2, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

donde c y f son funciones suaves en $\bar{\Omega}$ y ε es el parámetro de perturbación, que se considera en $[\varepsilon_0, 1]$, con $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Es bien sabido que para valores pequeños de ε , la solución u presenta capas límite en $\partial\Omega$, lo que exige el uso de mallas fuertemente adaptadas para lograr aproximaciones por elementos finitos que sean robustas y uniformemente convergentes respecto del parámetro. Sin embargo, cuando se requiere resolver el problema para múltiples valores de ε , el costo computacional de estas discretizaciones de alta dimensión resulta sumamente elevado.

En este trabajo estudiamos la aplicación del método de bases reducidas (RB) a este problema, con el objetivo de obtener aproximaciones eficientes para múltiples valores del parámetro. La construcción de la base reducida requiere calcular un conjunto de soluciones de alta fidelidad correspondientes a distintos valores de ε . Para ello empleamos una malla graduada independiente del parámetro [1], que permite capturar las capas límite y obtener estimaciones de error en norma de energía $|||\cdot|||$ casi robustas respecto de ε .

A través de un problema de autovalores generalizado se obtiene una representación espectral de las soluciones de alta fidelidad, lo que permite estudiar el error de la aproximación de la solución de alta fidelidad, $u^{\mathcal{N}}(\varepsilon)$, por la generada por el método RB, $u_N^{\mathcal{N}}(\varepsilon)$. Construimos el espacio reducido a partir de N instantáneas (snapshots) tomadas en puntos del parámetro equiespaciados en escala logarítmica. Adaptando la técnica de análisis a priori desarrollada en [2], demostramos que el error decae exponencialmente en norma de energía, con la dimensión N del espacio reducido, para ε en un subrango (al menos preliminar) de $[\varepsilon_0, 1]$ y $N \geq N_{crit}$:

$$|||u^{\mathcal{N}}(\varepsilon) - u_N^{\mathcal{N}}(\varepsilon)||| \leq 2e^{-N/(2N_{crit})}.$$

El resultado confirma que, pese a la perturbación singular en el parámetro, el método RB conserva sus propiedades de convergencia rápida, y sienta una base rigurosa para extender el análisis a familias más generales de problemas elípticos parametrizados singularmente perturbados.

Trabajo en conjunto con Melani Barrios (Universidad Nacional de Rosario & CONICET, Argentina), Ariel L. Lombardi (Universidad Nacional de Rosario & CONICET, Argentina) y Cecilia Penessi (Universidad Nacional de Rosario & CONICET, Argentina).

Referencias

- [1] R.G. Durán, A.L. Lombardi. Error Estimates on Anisotropic Q_1 Elements for Functions in Weighted Sobolev Spaces –1706.
- [2] Y. Maday, A.T. Patera, G. Turinici. Global a priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter symmetric coercive elliptic partial differential equations. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 335 (2002) 289-294