

ANÁLISIS A POSTERIORI DEL ERROR PARA LAS ECUACIONES ESTACIONARIAS DE
NAVIER-STOKES CON DATO DE DIRICHLET POCO REGULAR

Mauricio Mendiluce

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA) - IMAS (CONICET), Argentina
mmendiluce@dm.uba.ar

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio convexo, acotado y con borde poligonal. El problema consiste en determinar el campo de velocidades $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ y la presión $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfagan las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \text{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\text{Re} > 0$ denota el número de Reynolds, $\mathbf{f}$ la fuerza externa y $\mathbf{g}$ el dato de Dirichlet con $\mathbf{g} \in (L^2(\partial\Omega))^2$ y

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{2}.$$

Para $\mathbf{g} \in (L^2(\partial\Omega))^2$ es sabido que hay existencia de solución $\mathbf{u}$ en $(L^4(\Omega))^2$ bajo el concepto de *very weak solution* [1]. Sin embargo, la escasa regularidad de esta solución impide aplicar directamente las técnicas estándar de estimación de error tanto a priori como a posteriori [2]. Para superar esta dificultad y obtener una formulación variacional clásica que nos permita aproximar la solución eficientemente mediante elementos finitos, introducimos una formulación regularizada considerando un dato de Dirichlet $\mathbf{g}_h \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^2$ tal que cumpla (2) y $\|\mathbf{g} - \mathbf{g}_h\|_{L^2(\partial\Omega)} \rightarrow 0$ cuando la medida de la malla tiende a 0.

Para este nuevo problema, utilizando los elementos de Taylor-Hood P_2P_1 , construimos un estimador de error a posteriori de tipo residual y establecemos, bajo hipótesis adecuadas sobre los datos, su confiabilidad y eficiencia en la norma L^4 .

A partir de este resultado, y utilizando las estimaciones a priori del error probadas en [3], deducimos una estimación del error a posteriori para la solución del problema original [4]. Finalmente, presentamos resultados numéricos para el clásico *cavity flow problem*, los cuales muestran el buen desempeño del estimador y las ventajas de una estrategia adaptativa frente al refinamiento uniforme.

Trabajo en conjunto con María Gabriela Armentano (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA - IMAS, CONICET, Argentina).

Referencias

- [1] E. Marusic Paloka. Solvability of the navier-stokes system with L2 boundary data. Appl Math Optim (41): 365–375, 2000.
- [2] R. Verfurth, A posteriori error estimators and adaptive mesh-refinement techniques for the Navier-Stokes equations, in Incompressible Computational Fluid Dynamics: Trends and Advances, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, pp. 447–475.
- [3] M. G. Armentano and M. Mendiluce, Finite element approximation of the stationary Navier-Stokes problem with non-smooth data, preprint, arXiv:2509.16461 [math.NA], 2026.
- [4] M. G. Armentano and M. Mendiluce, A posteriori error analysis for the Navier-Stokes equations with non-smooth data, preprint, arXiv:2607.13014 [math.NA], 2026.