

NUEVAS MEJORES APROXIMACIONES EXTENDIDAS EN ESPACIOS DE ORLICZ–LORENTZ Y
PROPIEDADES DE CASI OPTIMALIDAD

Fabian Eduardo Levis

Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN, Argentina
flevis@exa.unrc.edu.ar

Sea L^0 la clase de todas las funciones medibles de Lebesgue definidas sobre $[0, a)$, $0 < a < \infty$, con valores en la recta real extendida y finitas en casi todas partes. Para $f \in L^0$, denotamos por f^* su reordenamiento decreciente. Sean $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función convexa, continuamente diferenciable, con $\phi(0) = 0$ y $\phi(t) > 0$ para todo $t > 0$, y $w : (0, a) \rightarrow (0, \infty)$ una función peso decreciente y continua. Para $f \in L^0$, definimos

$$\Psi_{w,\phi}(f) = \int_0^a \phi(f^*(t)) w(t) dt.$$

Denotamos por $\Lambda_{w,\phi}$ el espacio de Orlicz–Lorentz definido por $\Lambda_{w,\phi} := \{f \in L^0 : \Psi_{w,\phi}(rf) < \infty \forall r > 0\}$, y por $\Lambda_{w,\phi'}$ el espacio definido de manera análoga, donde ϕ' denota la derivada de ϕ . Dada S un subespacio de Chebyshev de dimensión finita, $B \subseteq (0, \alpha)$ un conjunto medible Lebesgue de medida positiva y $f \in \Lambda_{w,\phi}$, consideramos el problema de hallar $g \in S$ tal que

$$\Psi_{w,\phi}((f - g)\chi_B) = \inf_{h \in S} \Psi_{w,\phi}((f - h)\chi_B).$$

En esta charla, mostramos con argumentos similares a los usados en [1] que un tal $g \in S$ existe. Llamamos a este g una *mejor aproximación* (m.a.) de f desde S sobre B .

Además, presentamos una nueva caracterización de las mejores aproximaciones. Más precisamente, probamos que g es un m.a. de f desde S sobre B si y sólo si

$$0 \leq \sup_{\sigma \in \mathcal{A}_{(f-g)\chi_B}} \left[\int_{N(f-g) \cap B} w(\sigma) \phi'(|f - g|) \operatorname{sgn}(f - g) h + \phi'_+(0) \int_{Z(f-g) \cap B} w(\sigma) |h \chi_B| \right] \quad \forall h \in S. \quad (1)$$

donde $\mathcal{A}_f := \{\rho : (0, \alpha) \rightarrow (0, \alpha) : \rho \text{ preserva la medida en } (0, \alpha), |f| = f^* \circ \rho, \text{ c.t.p.}\}$.

En este contexto, $\Lambda_{w,\phi} \subset \Lambda_{w,\phi'}$, por lo que la condición (1) tiene sentido incluso cuando $f \in \Lambda_{w,\phi'}$. También, mostramos que para toda función $f \in \Lambda_{w,\phi'}$ existe al menos un $g \in S$ que satisface (1), al que denominamos *mejor aproximación extendida* (m.a.e.). Además, obtenemos diversas propiedades de las m.a.e. y demostramos que son casi óptimas en $\Lambda_{w,\phi'}$. Más precisamente, probamos que si $f \in \Lambda_{w,\phi'}$, entonces toda m.a.e. g satisface

$$\Psi_{w,\phi'}((f - g)\chi_B) \leq C \inf_{h \in S} \Psi_{w,\phi'}((f - h)\chi_B),$$

cuando $\phi'_+(0) = 0$. Por otra parte, cuando ϕ' es una constante positiva, demostramos que las m.a.e. verifican una propiedad análoga respecto de la cuasinorma de Lorentz, esto es,

$$\|(f - g)\chi_B\|_{w,p} \leq C \inf_{h \in S} \|(f - h)\chi_B\|_{w,p}, \quad 0 < p \leq 1.$$

Este trabajo está parcialmente subvencionado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C614-2), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería (Resol. Nro. 203/23), y Universidad Nacional de San Luis (PI UNSL 03/3026).

Trabajo en conjunto con María Inés Gareis (Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería, Argentina), Federico Dario Kovac (Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería, Argentina) y Ludmila Zabala (Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN, Argentina).

Referencias

- [1] D.E. Ferreyra, M.I. Gareis, F.E. Levis, Extended Best Polynomial Approximation Operator in Orlicz-Lorentz Spaces, Math. Nachr. 295 (2022), no. 7, 1292-1311.