

Luis Nowak

IITCI (CONICET-Universidad Nacional del Comahue), Departamento de Matemática
(FaEA-Universidad Nacional del Comahue), Argentina
luisencomahue@gmail.com

La comparación entre medidas de probabilidad constituye un problema central en transporte óptimo, estadística y análisis de datos. Entre las distancias más utilizadas se encuentra la distancia de Wasserstein de orden uno. Si $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, la dualidad de Kantorovich–Rubinstein proporciona la representación

$$W_1(\mu, \nu) = \sup_{\|\varphi\|_{\text{Lip}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi d(\mu - \nu) \right|.$$

En dimensión uno esta expresión admite, además, una representación particularmente simple en términos de las funciones de distribución:

$$W_1(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F_{\mu}(x) - F_{\nu}(x)| dx.$$

Si escribimos $\eta = \mu - \nu$ y $F_{\mu}(x) - F_{\nu}(x) = F_{\eta}(x) = \eta((-\infty, x])$, obtenemos entonces $W_1(\mu, \nu) = \|F_{\eta}\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Esta identidad permite interpretar el transporte de Wasserstein como una medición del tamaño global del potencial acumulativo F_{η} . Sin embargo, la norma L^1 no describe cómo se distribuye la discrepancia entre μ y ν a través de las distintas escalas espaciales. Dos pares de distribuciones pueden presentar valores similares de W_1 y, sin embargo, poseer estructuras locales u oscilatorias muy diferentes.

En esta comunicación presentamos una familia de métricas d_{RG}^{α} , $0 < \alpha < 1$, que incorpora precisamente esta información multiescala. La construcción se realiza mediante las diferencias segundas del potencial acumulativo,

$$\delta_t^{(2)} F_{\eta}(x) = F_{\eta}(x+t) - 2F_{\eta}(x) + F_{\eta}(x-t),$$

definiendo

$$d_{\text{RG}}^{\alpha}(\mu, \nu) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-2} \|\delta_t^{(2)} F_{\eta}\|_{L^1(\mathbb{R})} dt.$$

Esta expresión es equivalente a una seminorma homogénea de Besov: $d_{\text{RG}}^{\alpha}(\mu, \nu) \asymp \|F_{\eta}\|_{\dot{B}_{1,1}^{1-\alpha}(\mathbb{R})}$.

Mientras W_1 mide solamente el tamaño L^1 del potencial acumulativo, d_{RG}^{α} mide además su regularidad a través de todas las escalas. El peso $t^{\alpha-2}$ determina la importancia relativa asignada a cada una de ellas.

La conexión con Kantorovich–Rubinstein permite obtener una interpretación natural. La fórmula clásica expresa W_1 como una métrica integral de probabilidad generada por funciones Lipschitz. Para $0 < \alpha < 1$, en la métrica multiescala aparecen espacios de regularidad de tipo Hölder- α : en la recta, d_{RG}^{α} resulta equivalente a la *métrica de Zolotarev* ζ_{α} , la métrica integral de probabilidad generada por la bola unidad del espacio de Hölder homogéneo $\dot{C}^{\alpha}$.

El objeto dual, por lo tanto, no es nuevo. Lo que desarrollamos es su *representación primal* a través del potencial acumulativo, y las consecuencias que de ella se desprenden. A diferencia de un supremo sobre funciones test, la forma primal es una *integral* de valores absolutos de funcionales lineales, y esa estructura es la que permite descomponerla por rebanadas afines, discretizarla sobre un árbol diádico y leer la discrepancia escala por escala.

Esta estructura aparece también como una interpolación entre dos cantidades clásicas. En efecto, con

$$\|F_{\eta}\|_{L^1} = W_1(\mu, \nu), \quad \text{TV}(F_{\eta}) = \|\mu - \nu\|_{\text{TV}} := |\mu - \nu|(\mathbb{R}),$$

se tiene la desigualdad

$$d_{\text{RG}}^\alpha(\mu, \nu) \leq \frac{2^{1+\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} W_1(\mu, \nu)^\alpha \|\mu - \nu\|_{\text{TV}}^{1-\alpha}.$$

La constante es óptima: la desigualdad se alcanza con igualdad, para todo $r > 0$, en los pares de Diracs $\eta_r = \delta_0 - \delta_r$, donde $d_{\text{RG}}^\alpha = 4r^\alpha/(\alpha(1-\alpha))$ y $W_1 = r$. El parámetro α actúa así como parámetro de interpolación: valores próximos a 1 sitúan la métrica en un régimen dominado por el transporte, mientras que valores menores aumentan la sensibilidad a discrepancias presentes en escalas finas.

Trabajo en conjunto con Hugo Aimar (IMAL-CONICET-UNL, Argentina) y Diego Tomassi (Biofortis SAS, Francia).

Referencias

- [1] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces: An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [2] G. Garrigós, A. Seeger and T. Ullrich, *Basis properties of the Haar system in limiting Besov spaces*, Geometric Aspects of Harmonic Analysis, Springer INdAM Series, vol. 45, Springer, Cham, 2021, pp. 361–424.
- [3] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [4] S. S. Vallender, *Calculation of the Wasserstein distance between probability distributions on the line*, Theory Probab. Appl. **18** (1974), no. 4, 784–786.
- [5] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, 2003.
- [6] V. M. Zolotarev, *Ideal metrics in the problem of approximating the distributions of sums of independent random variables*, Theory of Probability and Its Applications **22** (1977), 433–449.