

Federico Dario Kovac

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa, Argentina

kovacf@ing.unlpam.edu.ar

Las desigualdades de normas para polinomios algebraicos constituyen una herramienta fundamental en teoría de aproximación, análisis armónico y métodos espectrales. Entre las más relevantes se encuentran las desigualdades de Bernstein, Markov, Remez y las desigualdades de tipo Nikolskii, las cuales relacionan normas L^p y L^q de polinomios y poseen aplicaciones en problemas extremales, aproximación polinomial y desigualdades para coeficientes de tipo Pólya [1-6].

En esta charla presentamos nuevas desigualdades de tipo Nikolskii para polinomios algebraicos definidas sobre uniones finitas de convexos acotados disjuntos de $\mathbb{R}^d$. Nuestro enfoque combina técnicas de reordenamiento con propiedades extremales de los polinomios de Chebyshev, obteniendo estimaciones explícitas y computables para las constantes involucradas. Más precisamente, para $0 < q < \infty$, consideramos la mejor constante $A(d, m, q, E)$ en

$$\|P\|_{C(E)} \leq A(d, m, q, E) \|P\|_{L^q(E)},$$

donde $A(d, m, q, E) := \sup_{Q \in \mathcal{P}_{m,d} \setminus \{0\}} \frac{\|Q\|_{C(E)}}{\|Q\|_{L^q(E)}}$. Aunque el comportamiento de estas constantes sobre cuerpos convexos es clásico [4,5], se conoce considerablemente menos para conjuntos desconectados. En este contexto, el comportamiento extremal de los polinomios puede variar significativamente entre las distintas componentes conexas, introduciendo nuevas dificultades geométricas.

Como consecuencia principal obtenemos que, si $E = \bigcup_{s=1}^k E_s$, donde $\{E_s\}_{s=1}^k$ es una familia de convexos acotados de medida positiva de $\mathbb{R}^d$ y disjuntos dos a dos, entonces para todo $0 < q \leq p \leq \infty$, todo $P \in \mathcal{P}_{m,d}$, y todo $c \in (0, 1)$, se verifica que

$$\|P\|_{L^p(E)} \leq c^{d/q} T_m \left(\frac{1+c}{1-c} \right) \left(\frac{|E|}{\min_{1 \leq s \leq k} |E_s|} \right)^{1/q} \|P\|_{L^q(E)},$$

donde T_m denota el polinomio de Chebyshev de primer tipo de grado m . La desigualdad obtenida posee constantes explícitas y computables, las cuales dependen únicamente del grado del polinomio, del exponente q la dimensión d y de relaciones simples entre las medidas de los conjuntos involucrados. Finalmente, realizamos un análisis de la constante $c^{d/q} T_m \left(\frac{1+c}{1-c} \right)$ y la comparamos con estimaciones clásicas [2].

Este trabajo está parcialmente subvencionado por la Universidad Nacional de Río Cuarto (PPI 18/C614-2), Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería (Resol. Nro. 203/23), y Universidad Nacional de San Luis (PI UNSL 03/3026).

Trabajo en conjunto con Fabián Eduardo Levis (Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN, Argentina) y Ludmila Zabala (Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN, Argentina).

Referencias

- [1] Timan, A.F., Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. Pergamon Press, 1963.
- [2] Daugavet, I.K., Some inequalities for polynomials in the multidimensional case, Numer. Methods 10 (1976), 3-26.
- [3] Borwein, P., Erdélyi, T., Polynomials and Polynomial Inequalities. Springer, 1995.
- [4] Ganzburg, M.I., Polynomial inequalities on measurable sets and their applications. Constr. Approx. 17 (2001), 275-306.
- [5] Ganzburg, M.I., Multivariate polynomial inequalities of different $lp, W(V)$ -metrics with k -concave weights. Acta Math. Hungar. 150 (2016), 99-120.

[6] Nevai, P., Totik, V., Sharp Nikolskii inequalities with exponential weights. *Anal. Math.* 13 (1987), 261-267.