

Miguel Reyes

Universidad Nacional de Salta, Argentina
mreyes@mi.unc.edu.ar

Estudiamos la geometría espectral de las variedades localmente simétricas compactas cubiertas por

$$M = SU(3)/SO(3),$$

equipado con la métrica inducida por la forma de Killing. La clasificación de Wolf muestra que estos espacios son cocientes $\Gamma \backslash M$ por grupos cíclicos finitos, que pueden parametrizarse mediante ternas $(1, k, n - k - 1)$ con n impar, sujetas a una relación explícita de equivalencia isométrica [1],[2]. El problema central consiste en determinar hasta qué punto el espectro del operador de Laplace–Beltrami distingue dichas clases de isometría.

La descomposición de Peter–Weyl y la teoría de representaciones esféricas del par $(SU(3), SO(3))$ reducen el espectro a las representaciones $H_{2p,2q}$. En la normalización considerada, el valor del Casimir en $H_{p,q}$ es

$$\lambda_{p,q} = \frac{p^2 + q^2 + pq + 3p + 3q}{9}.$$

La posible coincidencia entre distintos pares (p, q) constituye uno de los principales obstáculos para leer directamente las multiplicidades espectrales. Nos concentramos por ello en posiciones diagonales $p = q = m$ para las cuales el valor del Casimir es único. En este punto utilizamos aritmética de los enteros de Eisenstein, con lo cual obtenemos una caracterización exacta para el nivel diagonal $\lambda_{m,m}$.

Para calcular la multiplicidad correspondiente introducimos el retículo de congruencia

$$\Lambda_{n,k} = \{c \in \mathbb{Z}^3 : c_1 + c_2 + c_3 = 0, \ c_1 + kc_2 - (k+1)c_3 \equiv 0 \pmod{n}\},$$

y la norma hexagonal

$$\nu(c) = \frac{1}{2}(|c_1| + |c_2| + |c_3|).$$

Si $a_{n,k}(h)$ denota el número de puntos de $\Lambda_{n,k}$ con $\nu(c) = h$, demostramos que

$$\dim H_{m,m}^{\Gamma_{n,k}} = \sum_{h=0}^m (m - h + 1) a_{n,k}(h).$$

Esto último nos permite representar el problema en términos de funciones generatrices tomando como referencia el trabajo de Lauret, Miotello y Rossetti [3],[4]. Cabe mencioar que este trabajo fue abordado, también de manera computacional, lo cual permitió establecer criterios para evaluar numéricamente cuando dos variedades localmente simétricas $\Gamma_{n,k} \backslash M$ y $\Gamma_{n,k'} \backslash M$ son isoespectrales y no isométricas.

Trabajo en conjunto con EMILIO A. LAURET (Instituto de Matemática (INMABB), Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur (UNS)-CONICET, Bahía Blanca, Argentina.) y JOSÉ I. GARCÍA (CIUNSa, Fac. Cs. Exactas- Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina.).

Referencias

- [1] J. Wolf. Spaces of constant curvature. 6th ed. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2011.
- [2] Miguel A. Reyes. Isospectralidad entre espacios localmente simétricos cubiertos por $SU(3)/SO(3)$. Trabajo Final de Grado, Universidad Nacional de Salta. Director: Emilio A. Lauret; Codirector: José I. García. 2026.
- [3] E.A. Lauret, R.J. Miatello, J.P. Rossetti. Recent results on the spectra of lens spaces. Sao Paulo J. Math. Sci. 15:1 (2021), 240–267. DOI: 10.1007/s40863-019-00154-3.
- [4] E.A. Lauret, R.J. Miatello, J.P. Rossetti. Spectra of lens spaces from 1-norm spectra of congruence lattices. Int. Math. Res. Not. IMRN 2016:4 (2016), 1054–1089. DOI: 10.1093/imrn/rnv159