

NULLSTELLENSATZ EFECTIVO: ¿UN SOLO CULPABLE?

Nicolás Allo Gómez

Universidad de Buenos Aires & Universidad Torcuato Di Tella, Argentina
nicolas.allo@utdt.edu

El Nullstellensatz (NSS) de Hilbert (1893) es un resultado crucial de la Geometría Algebraica y permite dar respuesta a la siguiente pregunta: dados polinomios $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[\underline{X}] := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, ¿cuándo su conjunto de ceros comunes en $\overline{\mathbb{K}}^n$ (aquí $\overline{\mathbb{K}}$ es alguna clausura algebraica de $\mathbb{K}$) es vacío? La respuesta a este problema geométrico se obtiene vía un problema algebraico. El NSS establece que $f_1, \dots, f_s$ no tienen ceros comunes en $\overline{\mathbb{K}}^n$ si y solo si existen $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{K}[\underline{X}]$ tales que $1 = \sum_{i=1}^s g_i f_i$.

Desde el punto de vista efectivo, un enfoque posible y muy estudiado, que se remonta a [4], consiste en dar cotas superiores para los grados de los g_i en términos de los grados $d_i = \deg(f_i)$ y de la cantidad de indeterminadas n , ya que esto reduce el problema a uno sencillo de Álgebra Lineal. Los trabajos de [1], [2], [5] y [3], entre otros, acotan los grados de los g_i por una cantidad del orden de d^n , donde d es el máximo de los grados de los f_i . Además, el ejemplo de Brownawell–Masser–Philippon (BMP [1]) muestra que ese orden exponencial es esencialmente óptimo. Sin embargo, si los f_i no tienen ceros en el infinito, los grados quedan acotados por una cantidad lineal en los d_i (cf. [6]).

Sin suponer nada a priori sobre el comportamiento proyectivo, nos preguntamos si es posible “aislar” el mal comportamiento de los grados. Más precisamente, ¿es posible obtener una identidad de Bézout para el 1 mediante el uso de variables adicionales y formas lineales adecuadas, con grados controlados para cada variable, de modo que el comportamiento exponencial del tipo Bézout quede confinado a las variables nuevas?

En esta charla respondemos afirmativamente en algunos casos. Uno de ellos es el de n polinomios en n variables que son una intersección completa en $\mathbb{P}^n$ (esta situación incluye al ejemplo de BMP). Otro es el de $n + 1$ polinomios, también en n variables, con conjunto de ceros proyectivos finito y no vacío, que se generaliza sin dificultad al caso de $s > n$ polinomios.

Trabajo en conjunto con Teresa Krick (Departamento de Matemática & IMAS-Conicet, Universidad de Buenos Aires, Argentina) y Matías Bender (Inria & CMAP, CNRS, École Polytechnique, Institut polytechnique de Paris, Palaiseau, France)..

Referencias

- [1] Brownawell, W. D. Bounds for the degrees in the Nullstellensatz, Ann. of Math. 126 (1987), 577–591.
- [2] Caniglia, L.; Galligo, A.; Heintz, J. Borne simple exponentielle pour les degrés dans le théorème des zéros sur un corps de caractéristique quelconque, C. R. Acad. Sci. Paris 307 (1988), 255–258.
- [3] Fitchas, N.; Galligo, A. Nullstellensatz effectif et conjecture de Serre (théorème de Quillen–Suslin) pour le calcul formel, Math. Nachr. 149 (1990), 231–253.
- [4] Hermann, G. Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, Math. Ann. 95 (1926), no. 1, 736–788.
- [5] Kollár, J. Sharp effective Nullstellensatz, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 963–975.
- [6] Lazard, D. Algèbre linéaire sur $K[X_1, \dots, X_n]$ et élimination, Bull. Soc. Math. France 105 (1977), 165–190.