

CONJUNTOS CO-SIDON EN GRUPOS FINITOS

Edward Felipe Fernández Luna
UNIVERSIDAD DEL CAUCA, Colombia
edwardfer@unicauca.edu.co

Resumen

Los conjuntos de Sidon y sus generalizaciones constituyen un objeto central en la teoría de números aditiva. En esta ponencia se estudiarán pares co-Sidon, definidos por la unicidad de representación en el conjunto suma $A + B$, así como los problemas de cardinalidad. A partir de construcciones clásicas de conjuntos B_2 , se analizarán propiedades estructurales y cotas combinatorias para pares co-Sidon contenidos en intervalos enteros. Además, se introducirá la noción de pares co-Sidon en grupos abelianos y se estudiarán propiedades algebraicas del conjunto suma.

Conjunto de Sidon, Par co-Sidon, Grupo abeliano

Los conjuntos de Sidon deben su nombre a S. Sidon, quien los introdujo en el estudio de problemas relacionados con series de Fourier.

Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, con $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, un conjunto de enteros no negativos. Diremos que A es un *conjunto de Sidon* o un *conjunto B_2* si todas las sumas $a_i + a_j$, $1 \leq i \leq j \leq m$, son distintas.

La notación B_2 se generaliza naturalmente a conjuntos B_h , con $h > 2$, donde todas las sumas de h elementos son diferentes.

Uno de los principales problemas en el estudio de estos conjuntos consiste en determinar el máximo cardinal de un conjunto de Sidon contenido en el intervalo $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Una generalización natural de los conjuntos de Sidon se obtiene al considerar dos conjuntos A y B , y exigir que todas las sumas $a + b$, con $a \in A$ y $b \in B$, sean distintas. Para formalizar esta idea introducimos las siguientes definiciones.

La **función representación** para dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ está dada por

$$R_{A+B}(n) = |(a, b) \in A \times B : a + b = n|.$$

Dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ se llaman *co-Sidon* si $R_{A+B}(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Equivalentemente, (A, B) es un par co-Sidon si cada elemento de $A + B$ posee una única representación como suma de un elemento de A y un elemento de B .

Los pares co-Sidon fueron estudiados en [?] y [?], donde se demuestra el siguiente resultado.

Si $A, B \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ son co-Sidon, entonces

$$\min\{|A|, |B|\} \leq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor.$$

Además, la igualdad se alcanza para infinitos valores de n .

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}^+$, resulta natural preguntarse por la existencia de subconjuntos $B \subseteq \mathbb{Z}^+$ con máxima cardinalidad y que cumpla con la propiedad de ser co-Sidon.

En esta ponencia estudiaremos la relación entre pares co-Sidon y propiedades de cardinalidad. En particular, utilizaremos construcciones conocidas de conjuntos B_2 para obtener pares co-Sidon contenidos en intervalos enteros. Además, dado que se han considerado generalizaciones de estos problemas a estructuras algebraicas más generales, estudiaremos pares co-Sidon en grupos abelianos.

Sea G un grupo abeliano escrito aditivamente y sean $A, B \subseteq G$. Diremos que (A, B) es un par *co-Sidon* en G si para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, la igualdad $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ implica $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

Observe que esta definición preserva la idea fundamental de los pares co-Sidon en $\mathbb{Z}^+$: cada elemento del conjunto suma $A + B$ posee una única representación como suma de un elemento de A y un elemento de B .

A partir de esta generalización surgen naturalmente las siguientes preguntas, ¿se pueden caracterizar los subconjuntos $B \subseteq G$ tales que (A, B) forme un par co-Sidon en un grupo abeliano G ? o también, ¿existen condiciones, propiedades estructurales o cotas para subconjuntos en grupos abelianos finitos?

Como un primer acercamiento a estos problemas, se obtienen propiedades elementales de los pares co-Sidon en grupos abelianos. En particular, si (A, B) es co-Sidon en un grupo abeliano finito G , entonces:

- la aplicación suma $\varphi : A \times B \rightarrow G$, $\varphi(a, b) = a + b$, es inyectiva;
- se cumple $|A + B| = |A||B|$;
- si $|G| = n$, entonces $|A||B| \leq |G|$, y por tanto $|B| \leq \left\lfloor \frac{|G|}{|A|} \right\rfloor$;
- la propiedad co-Sidon es invariante bajo traslaciones;
- y si $|A||B| = |G|$, entonces necesariamente $A + B = G$.

Estas propiedades permiten relacionar problemas de maximalidad con propiedades combinatorias y algebraicas del conjunto suma $A + B$. Finalmente, se presentarán resultados elementales sobre pares co-Sidon en grupos abelianos finitos, incluyendo propiedades del conjunto suma, cotas para cardinalidades y condiciones algebraicas derivadas de la unicidad de representación. Con ello, la ponencia busca mostrar cómo herramientas clásicas de teoría aditiva permiten formular y extender problemas combinatorios naturales al contexto de grupos abelianos.