

Darío Devia

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
ddevia@campus.ungs.edu.ar

El teorema de Lochs y sus generalizaciones son teoremas de conversión entre bases de numeración (ver, por ejemplo, [1]). Estos estudian el comportamiento del número de dígitos en el desarrollo de un número real en una cierta base que quedan determinados como función del número de dígitos conocidos en alguna otra base. Este tipo de resultados, en general, se establecen en casi todo punto o en medida, con respecto de una medida boreliana del intervalo $[0, 1]$. El teorema que Lochs probó en 1964 [4] compara el desarrollo decimal y el desarrollo en fracciones continuas.

El caso de los desarrollos en bases enteras b_1 y b_2 fueron estudiados por Dajani y sus colaboradores (ver, por ejemplo, [2] y [3]). En estos trabajos se prueba que si $L_n(x, b_1, b_2)$ denota la cantidad de dígitos en la base b_2 que se pueden determinar si se conocen n dígitos de $x \in [0, 1]$ en base b_1 , entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} L_n(x, b_1, b_2) = \frac{\ln b_1}{\ln b_2} \quad \text{c.t.p.} \quad (1)$$

para la medida de Lebesgue. Decimos que un número $x \in [0, 1]$ *no es de Lochs* si (i) no es b_1 o b_2 -ádico y (ii) no cumple el límite (1). En esta comunicación mostraremos que si b_1 y b_2 son coprimos, existe un conjunto no numerable de números que no son de Lochs. Más precisamente, probaremos que la constante de Liouville en base b_2 y sus generalizaciones de la forma

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot b_2^{-j!}, \quad a_j \in \{1, \dots, b_2 - 1\}$$

satisfacen que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(z, b_1, b_2)}{n} = 0.$$

Además, mostraremos que el conjunto excepcional para el límite (1) y las clases de Jarník están vinculadas. En efecto, si $z \in [0, 1]$ es tal que existe $r \in [0, 1)$ para el cual

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(z, b_1, b_2)}{n} = r \frac{\ln b_1}{\ln b_2},$$

entonces el exponente de irracionalidad de $\mu(z)$ de z satisface que

$$\text{si } r \neq 0, \mu(z) \geq \max\{2, 1/r\} \quad \text{y} \quad \text{si } r = 0, \mu(z) = \infty.$$

Trabajo en conjunto con Eda Cesaratto (Universidad Nacional de General Sarmiento, CONICET, Argentina).

Referencias

- [1] V. Berthé, E. Cesaratto, P. Rotondo, and M. D. Safe. Lochs-type theorems beyond positive entropy. *Monatshefte für Mathematik*, 200(4):737–779, 2023.
- [2] W. Bosma, K. Dajani, and C. Kraaikamp. Entropy quotients and correct digits in number-theoretic expansions. In François Blanchard, A. Maass, and A. Nogueira, editors, *Dynamics Stochastics*, volume 48 of *IMS Lecture Notes–Monograph Series*, pages 176–188. Institute of Mathematical Statistics, Beachwood, OH, 2006.
- [3] K. Dajani and A. Fieldsteel. Equipartition of interval partitions and an application to number theory. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(12):3453–3460, 2001.
- [4] G. Lochs. Vergleich der Genauigkeit von dezimalbruch und kettenbruch. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 27:142–144, 1964.