

Sebastián Wilhelm

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
swilhelm@campus.ungs.edu.ar

Consideremos una función escalar u , absolutamente continua sobre el intervalo $[0, b]$ con $b > 0$. La derivada proporcional de Caputo de orden $\alpha \in (0, 1)$ para u , introducida en [1], se define por

$$D_{PC}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (\mathcal{K}_1(\alpha, \tau)u(\tau) + \mathcal{K}_0(\alpha, \tau)u'(\tau))(t-\tau)^{-\alpha} d\tau, \quad t \in (0, b]$$

donde $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1 : [0, 1] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ son funciones continuas que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i(\alpha, t) &\neq 0, & \forall t \in (0, b], i = 0, 1 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_0(\alpha, t) &= 0, & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathcal{K}_0(\alpha, t) = 1 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_1(\alpha, t) &= 1, & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathcal{K}_1(\alpha, t) = 0. \end{aligned}$$

Es claro que la derivada proporcional de Caputo puede escribirse en términos del operador integral de Riemann-Liouville de orden $1 - \alpha$, $I_{RL}^{1-\alpha}$, en la forma

$$D_{PC}^\alpha = I_{RL}^{1-\alpha} [\mathcal{K}_1 u + \mathcal{K}_0 u'].$$

En general, el cálculo exacto de $D_{PC}^\alpha u$ no es posible, aunque esto depende fuertemente de la función u considerada, de los núcleos $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$, y del orden α . Por este motivo, resulta relevante contar con algún método que permita aproximar dicha derivada.

En este trabajo, proponemos una regla numérica que permite aproximar la derivada proporcional de Caputo, mediante una suma ponderada de evaluaciones en los nodos de una malla arbitraria del intervalo $[0, t]$ para $t \in (0, b]$. El método propuesto se basa en una regla de cuadratura (del tipo trapecios, con lineamientos similares a los considerados en [2,3]) para aproximar la integral fraccionaria $I_{RL}^{1-\alpha}$ en combinación con una discretización (del tipo diferencias finitas) de la derivada u' . Concretamente, la regla propuesta es:

$$D_{Num}^{\alpha, PC} u(t) = \sum_{j=0}^N c_j \left(\mathcal{K}_{1j} u_j + \mathcal{K}_{0j} \frac{u_j - u_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \right)$$

donde u_k y $\mathcal{K}_{ik}$ denotan las evaluaciones de u y $\mathcal{K}_i$, respectivamente, en el nodo t_k de la malla; mientras que los coeficientes c_j dependen del orden de la derivada y de los nodos de la partición.

La regla propuesta brinda una aproximación de la derivada proporcional de Caputo en el sentido otorgado por la siguiente estimación del error; en particular, se observa que la aproximación mejora conforme se refina la partición considerada.

TEOREMA Sea Π una partición arbitraria del intervalo $[0, t]$ con $t \in (0, b]$. Entonces

$$\left| D_{PC}^\alpha u(t) - D_{Num}^{\alpha, PC} u(t) \right| \leq \mathcal{C} t^{1-\alpha} \text{diam}(\Pi)$$

donde $\mathcal{C}$ es una constante positiva independiente de la partición elegida.

Mediante ejemplos concretos ilustramos la aplicabilidad de la regla y corroboramos la estimación obtenida. Actualmente, estudiamos el uso de la regla propuesta para obtener métodos de aproximación numérica en problemas de valores iniciales, en principio, del tipo:

$$\begin{cases} D_{PC}^\alpha u(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = \mu_0. \end{cases}$$

Trabajo en conjunto con Gabriel Monzón (Universidad Nacional de General Sarmiento).

Referencias

- [1] Baleanu D., Fernandez A., Akgül A. On a fractional operator combining proportional and classical differintegrals. Mathematics, 8, 360, 13 pp. (2020).
- [2] Akgul A., Baleanu D. " : Analysis and applications of the proportional Caputo derivative. Adv. Differ. Equ., 2021:136 (2021).
- [3] Odibat Z.: Approximations of fractional integral and Caputo fractional derivatives, Appl. Math. Comput., 178, 527-533 (2006).