Desigualdades de Sóbolev-Poincaré en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Ignacio Ojea
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA - IMAS, Conicet., Argentina
iojea@dm.uba.ar

Estudiamos desigualdades de la forma

$$\|f - f_\Omega\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq C\|d^{1-\alpha}\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de John, d es la distancia al borde $\partial\Omega$, $p : \Omega \to (1, \infty)$ es un exponente variable, $0 \leq \alpha < 1$ y $q(\cdot)$ se define por:

$$\frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{\alpha}{n}.$$

Esta familia de desigualdades contempla la desigualdad de Poincaré mejorada, que ocurre cuando $q(\cdot) = p(\cdot)$ y $\alpha = 0$, y recibe ese nombre a raíz del peso con exponente positivo en el lado derecho. En el otro extremo, se tiene que para $\alpha = 1$, $q(\cdot) = p(\cdot)^*$, que corresponde a la desigualdad de Sóbolev-Poincaré (sin peso).

Estas desigualdades son bien conocidas en espacios de Sóbolev clásicos. En particular, se sabe que los dominios de John son esencialmente la clase más general de dominios para los cuales son válidas. En espacios con exponente variable la desigualdad de Sóbolev Poincaré fue demostrada bajo la hipótesis de log-Hölder continuidad del exponente $p(\cdot)$, como consecuencia de la continuidad del operador maximal de Hardy-Littlewood.

En esta charla mostramos que (1) (con $\alpha < 1$) vale sobre dominios de John bajo condiciones mucho más laxas. En particular necesitamos una condición de log-Hölder continuidad solo en el borde del dominio y un control de la oscilación de $p(\cdot)$ en el interior de Ω que admite saltos discontinuos. De hecho, $p(\cdot)$ puede ser discontinuo en todo punto. Nuestra demostración se basa en una técnica de descomposición de funciones acompañada de un argumento de local a global.

Presentamos además un contraejemplo que muestra que nuestra condición de log-Hölder continuidad en el borde es necesaria. Concretamente, construimos un exponente $p(\cdot)$ uniformemente continuo que no satisface esta hipótesis y para el cual la desigualdad no puede ser cierta. Una adaptación del mismo ejemplo permite probar que la log-Hölder continuidad clásica (en el interior de Ω) es necesario para la validez de otras desigualdades relacionadas, como la acotación de la solución del operador divergencia o la desigualdad de Korn.

Trabajo en conjunto con David Cruz-Uribe OFS (University of Alabama) y Fernando López-García (California State Polytechnic University Pomona).