El problema de Hamilton-Waterloo: historia, variaciones y últimos avances

Adrián Pastine
Departamento de Matemática, Universidad Nacional de San Luis, e IMASL (UNSL-CONICET), Argentina
agpastine@gmail.com

El problema de Hamilton-Waterloo es un problema clásico de descomposición de grafos, que yace en la intersección entre la teoría de grafos y la teoría de diseños combinatorios. Este tipo de problemas tienen aplicaciones en la construcción de otros objetos combinatorios y en el diseño de experimentos.

Un k-factor de un grafo es un subgrafo generador k-regular. En particular, un 1-factor es un matching perfecto, y un 2-factor es una unión disjunta de ciclos. Denotamos por K_n^* al grafo completo K_n de orden n si n es impar, y a K_n menos las aristas de un 1-factor si n es par. Dados dos 2-factores de K_n^*, F_1 y F_2, el problema de Hamilton-Waterloo estudia para qué valores de r y s es posible particionar las aristas de K_n^* en r copias de F_1 y s copias de F_2. La mayor parte del estudio de este problema se realizó para el caso uniforme, que es cuando todos los ciclos de F_1 tiene un tamaño fijo x, y todos los ciclos de F_2 tienen un tamaño fijo y. De todos modos, quedan aún casos uniformes por estudiar, en particular cuando x e y son coprimos. En lo que respecta al caso no uniforme, hay muy poco hecho, por lo que queda aún mucho camino por recorrer.

En esta charla daremos un recuento histórico del problema, pasando por los resultados más importantes y presentando el estado del arte actual. Presentaremos algunas construcciones que hacen uso de grupos y de cuasigrupos, y algunas técnicas de producto de grafos y de duplicado de vértices. Hablaremos también de algunas variaciones del problema, como el problema de Hamilton-Waterloo de la luna de miel, y el problema de Hamilton-Waterloo sobre grafos equipartitos completos.