Resolución de una ecuación no lineal de Volterra en L^2 con técnicas de problema inverso de momentos

María Beatriz Pintarelli
Dep.de Matemática, Fac. de Ciencias Exactas, UNLP- Dep. Ciencias Básicas, Fac. Ingeniería, UNLP, Argentina
mariabpintarelli@gmail.com

El problema consiste en encontrar $y(x)$ en la ecuación

$$y(x) + \int_0^x \psi(x, s, y(s))ds = g(x) \, x \geq 0$$

donde $y(x)$ es la función desconocida y las funciones $g(x)$ y $\psi(x, s, y)$ son conocidas. Además $\psi \epsilon [0, \infty) \times [0, \infty) \times R$.

También y ,g , y ψ son 2 veces continuamente diferenciables con respecto a x.
El espacio subyacente es $L^2[0, \infty)$.

Es posible resolver numéricamente el problema usando las técnicas de problema inverso de momentos generalizados.
Se aproxima $y(x)$ en dos pasos:
Primero diferenciamos la ecuación integral con respecto a x y anotamos $h(t) = (t(T - t))^2$ con $0 \leq t \leq T$
Entonces

$$((y(x) - g(x))h(t))_x = -\left(\int_0^x \psi_x(x, s, y(s))ds + \psi(x, x, y(x))\right) h(t) = G1(x, t)$$

Escribimos $w(x, t) = (y(x) - g(x))h(t)$ definida en $D = (x, t); 0 \leq x < \infty; 0 \leq t \leq T$.

Consideramos la ecuación

$$w_{xx}(x, t) - w_{tt}(x, t) = G1(x, t)_x - w_{tt}(x, t) = H(x, t)$$

y la llevamos a una ecuación integral la cual se resuelve numéricamente y se encuentra una solución $p_{1n}(x, t)$ para $H(x, t)$.

Finalmente consideramos $w_{xx}(x, t) - w_{tt}(x, t) = p_{1n}(x, t)$ y la llevamos a una ecuación integral

$$\iint_D (y(x) - g(x))e^{-mx}dA = \frac{1}{\int_0^T h(t)dt}\left(\frac{-G(m, 0) + \iint_D up_{1n}(x, t)dA}{m^2}\right)$$

Esta ecuación integral se resuelve numéricamente y entonces $p_{2n}(x)$ es una solución aproximada para $y(x) - g(x)$. Es decir $y(x) \approx g(x) + p_{2n}(x)$.
Se encuentra una cota para el error de la solución estimada y se ilustra el método con ejemplos.