Hipergrafos y aplicaciones.

Dalma Bilbao
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral - IMAL, CONICET, UNL,Santa Fe, Argentina
bilbaodalmaanahi@gmail.com

En el análisis de relaciones entre elementos de un sistema, se emplea la teoría de grafos para representar conexiones, pero esta se limita a relaciones entre pares de elementos. Sin embargo, en el mundo real, las relaciones pueden ser más complejas y no se limitan a conexiones simples entre dos elementos. La modelización usando grafos puede ocasionar una pérdida significativa de información del sistema. Por lo tanto, se requieren técnicas más sofisticadas de modelado y análisis para capturar la diversidad y complejidad de los datos. En 1960, Claude Berge propuso la teoría de hipergrafos como una extensión natural de la teoría de grafos para abordar esta problemática, [1,2,3]. Un hipergrafo se define como un par ordenado $H(V,E)$ donde V representa los vértices y E las hiperaristas. Las hiperaristas son subconjuntos de V que cubren V.

En este trabajo, presentamos un modelo para construir hipergrafos basado en la noción de relaciones entre grafos con vértices similares pero conexiones distintas. Un ejemplo práctico es la representación de relaciones de amistad entre un grupo específico de individuos en diferentes redes sociales, las diversas formas de transporte que conectan un conjunto de ciudades fijas, o las conexiones de diferentes áreas cerebrales en distintas bandas de frecuencias. Este enfoque permite capturar la complejidad de las relaciones en situaciones donde los elementos del sistema pueden estar conectados de maneras diversas en contextos distintos.

Sean $G_i = (W, \mathcal{E}_i)$, i=1,..,m; m grafos con el mismo conjunto de vértices W, con cardinal de $W = k$.

Sea $A_i = (a_i^{\lambda\mu} : \lambda, \mu = 1, .., k)$ la matriz de incidencia de G_i. Con estos m grafos de k vértices construimos un hipergrafo de $p = \frac{k(k-1)}{k}$ vértices de la siguiente manera. Sea $V = \{\{\lambda, \mu\} : \lambda, \mu = 1, .., k\}$. En V costruimos m-hiperaristas $e_i : i = 1, .., m$ (en subconjuntos de V) de la siguiente manera $e_i = \Big\{\{\lambda, \mu\} \in V : a_i^{\lambda\mu} = 1\Big\}$.

La matriz de incidencia de este hipergrafo será la matriz de k filas por $p = \frac{k(k-1)}{k}$ columnas dada por $\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}_{i;\{\lambda,\mu\}} = a_i^{\lambda\mu}$; i=1,..,m ; $\{\lambda, \mu\} \in V$.

Una vez construida la matriz de incidencia $\mathcal{I}$, podemos aplicar diversos cuantificadores de hipergrafos mencionados en la bibliografía. En este trabajo, nos enfocaremos en dos : el análisis del espectro del laplaciano (incluyendo el cálculo de la entropía) y el análisis de la centralidad de los vértices del hipergrafo. Estas técnicas nos permitirán obtener información relevante sobre la estructura y las propiedades del hipergrafo. Finalmente, hemos aplicado el método propuesto a datos reales. En este caso, hemos estudiado la conectividad funcional en diferentes bandas de frecuencia utilizando registros de electroencefalografía intracraneal (iEEG) en ratas. El objetivo fue investigar los distintos estados de sueño (despierto, sueño REM, sueño noREM y vigilia tranquila). En este contexto, los vértices del grafo, son $k = 6$ y representan un canal de iEEG, cada grafo G_i $(i = 1, ..., 6)$ representa la conectividad para diferentes bandas de frecuencia: delta, theta, alfa, beta, y gamma. Utilizando este conjunto de grafos, hemos construido diferentes hipergrafos para cada estado de sueño, permitiéndonos analizar y comparar sus características.

Trabajo en conjunto con Dr. Diego Mateos y Dr Hugo Aimar Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL-CONICET-UNL)..

Referencias

[1] Berge C. Graphs and hypergraphs. North-Holland Pub. Co, 1973.

[2] Alain Bretto. Hypergraph Theory An Introduction. Springer International Publishing Switzerland, 2013.

[3] Qionghai Dai Yue Gao. Hypergraph Computation. Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2023.