Algoritmos para coarsening en Espacios de Splines

Silvano Carlos Figueroa
Universidad Nacional del Litoral, Facultad de Ingeniería Química, Argentina
nano95figueroa@gmail.com

Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $\Delta = \{a = \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N = b\}$ una partición de $[a,b]$. Sean n y p enteros positivos. Denotamos con $\mathcal{S}$ al espacio de dimensión n de funciones splines polinomiales de grado menor o igual que p definido sobre un vector de nodos $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+p+1}\}$ dado por

$$\Xi = \{\underbrace{\zeta_1, \ldots, \zeta_1}_{m_1\text{-veces}}, \underbrace{\zeta_2, \ldots, \zeta_2}_{m_2\text{-veces}}, \cdots \underbrace{\zeta_N, \ldots, \zeta_N}_{m_N\text{-veces}}\}.$$

donde

$$a = \xi_1 = \ldots \xi_{p+1} \leq \xi_{p+2} \leq \ldots \leq \xi_n < \xi_{n+1} = \ldots = \xi_{n+p+1} = b.$$

Dada $s \in \mathcal{S}$ y TOL> 0, se busca un spline $\hat{s} \in \hat{\mathcal{S}}$ tal que

$$\|s - \hat{s}\| < TOL$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{S}$ y $\hat{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$. Para ello desarrollamos tres algoritmos, los cuales reciben por entradas el spline s (con su respectivo vector de coeficientes $\mathbf{c}$), TOL> 0 y $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{L^\infty}$, $\|\cdot\|_{H^1}$ para cada algoritmo, respectivamente.

La elección de un nodo ξ_* a remover se basa en calcular una serie de indicadores $\{\varepsilon_j\}$ y luego escoger j_* de tal manera que

$$\varepsilon_{j_*} = \min_j \{\varepsilon_j\}$$

El cálculo de los indicadores, en cada algoritmo, está fuertemente relacionado con la norma. Por ejemplo, en el caso de $\|\cdot\|_{L^2}$, tenemos que los indicadores se pueden calcular como

$$\varepsilon_j = \mathbb{E}_{\Xi,j}(s) = |\mathbf{r}_{loc}^T \mathbf{c}_{loc}|$$

donde $\mathbf{r}_{loc}$ se puede obtener facilmente a partir de unos pocos nodos y $\mathbf{c}_{loc}$ es un subvector de $\mathbf{c}$.

Así, cada algoritmo devuelve como salida un vector de nodos $\hat{\Xi}$ con menos nodos y un spline $\hat{s}$ que satisface $\|s - \hat{s}\| < TOL$.

Por último se presentan experimentos numéricos en los cuales se analizan diferentes problemas y se observa que la curva de error generada por los algoritmos propuestos se comporta mejor comparada con la de otros algoritmos ya existentes en la bibliografía y que además el gasto computacional de almacenamiento y tiempo es mucho menos costoso.

Trabajo en conjunto con Eduardo Garau (Universidad Nacional del Litoral, Argentina), Pedro Morin (Universidad Nacional del Litoral, Argentina).