Discretización de un problema fraccionario usando mallas graduadas

Cecilia Penessi
Universidad Nacional de Rosario - CONICET, Argentina
cecilia@fceia.unr.edu.ar

Consideramos la aproximación por elementos finitos del problema (P) de contorno para potencias fraccionarias de un operador elíptico

$$\mathcal{L}^s u = f \qquad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \qquad \text{en } \partial\Omega,$$

donde por simplicidad Ω es el cuadrado unitario $[0,1]^2$, $\mathcal{L}$ es un operador elíptico de la forma $\mathcal{L}v = -\Delta v + c(x)v$, con $c(x) \geq 0$, y $s \in (0,1)$. La dificultad para obtener esquemas eficientes radica en que $\mathcal{L}^s$ es un operador no local. Para lograr una discretización manejable computacionalmente, utilizamos una estrategia propuesta por Caffarelli y Silvestre [2], quienes mostraron que cualquier potencia fraccionaria del Laplaciano en $\mathbb{R}^n$ puede realizarse como una aplicación Dirichlet-to-Neumann de una extensión al semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$. El problema extendido se aproxima mediante una diagonalización a partir de una semidiscretización en la variable extendida, resultando en la solución de una sucesión de problemas de reacción–difusión singularmente perturbados.

En la literatura (por ejemplo [1]) se proponen estrategias para resolver adecuadamente estos problemas que requieren del uso de mallas anisotrópicas geométricamente refinadas hacia la frontera de Ω. Sin embargo, para obtener resultados adecuados, las mallas deben ser elegidas dependiendo del parámetro de perturbación singular de cada uno de los problemas obtenidos.

Para la discretización de tales problemas de reacción–difusión, proponemos utilizar elementos finitos sobre mallas graduadas (introducidas en [3]) que se definen independientemente del valor del parámetro de perturbación singular, para las cuales se tienen resultados de aproximación óptimos en la norma de la energía.

Combinando esta técnica con nuevos resultados de superconvergencia para los problemas de reacción–difusión, obtenemos convergencia óptima en el parámetro de discretización para la aproximación del problema (P).

Trabajo en conjunto con Melani Barrios (Universidad Nacional de Rosario - CONICET) y Ariel L. Lombardi (Universidad Nacional de Rosario - CONICET).

Referencias

[1] Lehel Banjai, Jens M. Melenk, Christoph Schwab. Exponential convergence of hp-fem for spectral fractional diffusion in polygons. Numerische Mathematik, 153(1):1–47, 2023.

[2] Luis Caffarelli, Luis Silvestre. An extension problem related to the fractional laplacian. Communications in partial differential equations, 32(8):1245–1260, 2007.

[3] Ricardo G. Durán, Ariel L. Lombardi. Error estimates on anisotropic Q1 elements for functions in weighted Sobolev spaces. Math. Comput., 74(252):1679–1706, 2005.