Espacios de Musielak-Orlicz y continuidad del operador integral fraccionaria.

René Morari
Universidad Nacional del Comahue, Argentina
rmorari1@gmail.com

En este trabajo, estudiamos el comportamiento del operador integral fraccionaria I_α, con $0 < \alpha < n$ actuando sobre espacios de Musielak-Orlicz, [1]. Estos espacios, denotados por $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ están definidos como el conjunto de todas las funciones f medibles para las cuales existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x, |f(x)|/\lambda)\, dx < \infty\,,$$

donde $\Psi : \mathbb{R}^n \times [0,\infty] \to [0,\infty]$ satisface que $\Psi(\cdot, t)$ es medible para todo $t \geq 0$ y para cada $x \in \mathbb{R}^n$ la función $\Psi(x,\cdot)$ es convexa, continua por izquierda y cumple que $\Psi(x,0) = 0$, $\lim_{t\to 0^+} \Psi(x,t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \Psi(x,t) = \infty$.

El objetivo de este trabajo es analizar condiciones necesarias y suficientes para que una extensión del operador, $\tilde{I}_\alpha$ sea acotada del espacio $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ en espacios adecuados $\mathcal{L}_{\alpha,\Psi}(\mathbb{R}^n)$, definidos para cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a través de la siguiente desigualdad

$$\sup_{B\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|^{\frac{\alpha}{n}} \|\chi_B\|_{\Psi^*}} \int_B |f(x) - f_B|\, dx < \infty\,,$$

donde f_B es el promedio de f sobre B. Estos espacios generalizan los vistos en [2]. Con esto, se obtuvo el siguiente resultado.

Dados $0 < \alpha < n$ y Ψ como antes con $\Psi(\cdot, t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, son equivalentes

a. El operador I_α puede ser extendido a un operador $\tilde{I}_\alpha$, lineal y acotado desde $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{L}_{\alpha,\Psi}(\mathbb{R}^n)$.

b. Existe una constante $C > 0$ tal que para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ con centro x_0 se cumple

$$\left\| \frac{\chi_{\mathbb{R}^n - B}}{|x_0 - \cdot|^{n-\alpha+1}} \right\|_{\Psi^*} \leq C|B|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{n} - 1} \|\chi_B\|_{\Psi^*}\,,$$

donde Ψ^* es la función conjugada de Ψ.

Trabajo en conjunto con ALEJANDRA PERINI (UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE) y MAURICIO RAMSEYER (IMAL (UNL-CONICET)).

Referencias

[1] J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces, Springer, Berlin, 1983.

[2] M. Ramseyer, O. Salinas and B. Viviani, Lipschitz type smoothness of the fractional integral on variable exponent spaces, Math. Analysis and Appl., 403 (2013), 95-106.